ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ
ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 18. новембар 2017.

1. За природан број n који није степен двојке, означимо са $a(n)$ и $b(n)$ редом највећи и најмањи непаран делилац броја n већи од јединице. Одредити све бројеве n за које је

$$3a(n) + 5b(n) = n.$$

2. На тренингу је n фудбалера, од којих су неки нападачи а остали голмани, вежбало извођење пенала. Постигнуто је укупно k голова. Доказати да им тренер може доделити бројеве од 1 до n тако да се, за сваки постигнут гол, ознаке нападача и голмана разликују за бар $n - k$.

3. Дати су позитивни бројеви a, b и c. Одредити све тројке позитивних бројева (x, y, z) такве да важи

$$x + y + z = a + b + c \quad \text{и} \quad 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z = abc.$$

4. Дат је паралелограм $ABCD$. На страницама AB и BC и продужетку странице CD иза темена D одабране су тачке K, L и M, редом, тако да је $KL = BC$, $LM = CA$ и $MK = AB$. Дуж KM сече дуж AD у тачки N. Доказати да је $LN \parallel AB$.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕГМО 2018

Београд, 2. децембар 2017.

1. Наћи све природне бројеве a и b и просте бројеве p и q такве да је бар један од бројева p и q већи од 12 и важи

$$p^a + q^b = 19^a.$$

2. Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез ($AB \parallel CD$) и нека је E произвољна тачка оног лука AB описане кружнице трапеза који не садржи друга темена трапеза. Из сваке од тачака A и B спуштене су нормале на праве EC и ED. Доказати да су добијена четири подножја нормала концикличне тачке.

3. Нека је k природан број и нека је $\mathcal{F}$ фамилија скупова од којих сваки има кардиналност k. Ако сваких $k+1$ скупова из фамилије $\mathcal{F}$ има непразан пресек, доказати да сви скупови из фамилије $\mathcal{F}$ имају непразан пресек.

Време за рад: 180 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1.1. Нека је p најмањи прост делилац броја n и $n = 2^k mp$, где је m непаран број и $t \geqslant 0$. Тада је $a(n) = mp$, $b(n) = p$ и $2^k mp = 3mp + 5p$, одакле је $(2^k - 3)m = 5$. Имамо две могућности.

(i) $m = 1$ и $2^k - 3 = 5$, тј. $k = 3$. Тада је $n = 8p$, што јесте решење.

(ii) $m = 5$ и $2^k - 3 = 1$, тј. $k = 2$. Тада је $n = 20p$, а како је p најмањи непаран прост делилац, мора бити $p = 3$ или $p = 5$, што даје још два решења: $n = 60$ и $n = 100$.

1.2. Тврђење доказујемо индукцијом по k. За $k = 0$ оно је тривијално; претпоставимо да је $k \geqslant 1$. Голмане који су примили гол означавамо бројевима $1, 2, \dots$, а нападаче који су дали гол бројевима $n, n-1, \dots$. Играче који нису ни дали ни примили гол за сада остављамо неозначене. По индуктивној претпоставци, играче можемо да означимо тако да се, за сваки од првих $k-1$ голова, ознаке нападача и голмана разликују за бар $n-k+1$.

Посматрајмо k-ти гол. Нека је голман који га је примио означен бројем ℓ; ако он још није означен, за ℓ узимамо најмањи слободан број. Ако нападач који је дао тај гол још није означен, њему додељујемо највећи слободан број: он свакако није мањи од $n-k+1$. Сада голмана ℓ пренумеришемо бројем 1, док свим голманима са бројевима $1, 2, \dots, \ell-1$ увећавамо ознаке за 1. Овако се при сваком од првих $k-1$ голова ознаке нападача и голмана разликују за бар $n-k$, што значи да је захтев из задатка испуњен. Неозначене играче означавамо произвољно.

<u>*Друго решење.*</u> Нека има m голмана. Поређајмо их у опадајући поредак по броју примљених голова и означимо их редом бројевима од 1 до m. Остаје да нападачима редом доделимо ознаке од $m+1$ до n, једну по једну, тако да се услов задатка не наруши. Доказаћемо да је ово могуће.

Претпоставимо да смо ознаке од $m+1$ до $m+r-1$ успешно доделили, али ознаку $m+r$ не можемо. То значи да је сваки од $n-m-r+1$ неозначених нападача дао гол неком голману чија је ознака не мања од $m+r-(n-k-1)$, а таквих голмана има $n-k-r$ (дакле, $n-k-r \geqslant 1$). Следи да је и сваки од осталих $m-(n-k-r)$ голмана (то су они који су добили највише голова; приметимо да је $n-m-r+1 \leqslant k$, тј. $m-(n-k-r) \geqslant 1$) примио гол. То укупно даје бар $(n-m-r+1) + m - (n-k-r) = k+1$ датих голова, контрадикција.

1.3. Запишимо другу једначину у облику $\frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz} = 4$, тј.

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1 = 4, \quad \text{где су} \quad x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}\,, \ y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}} \ \text{ и } \ z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}\,.$$

Јасно је да је $0 < x_1, y_1, z_1 < 2$. Ако ову једначину посматрамо као квадратну по z_1, њена дискриминанта је $D = (4 - x_1^2)(4 - y_1^2)$, тако да има смисла ставити $x_1 = 2\sin u$ и $y_1 = 2\sin v$ $(0 < u, v < \pi/2)$. Тада се добија $z_1 = \frac{1}{2}(-x_1y_1 + \sqrt{D}) = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v) = 2\cos(u + v)$.

Сада је $a = 2\sqrt{yz} \cdot \sin u$, $b = 2\sqrt{xz} \cdot \sin v$ и $c = 2\sqrt{xy}(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$, па једначина $x + y + z - a - b - c = 0$ постаје

$$(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u)^2 + (\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z})^2 = 0,$$

одакле је $\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \frac{1}{2}(y_1\sqrt{x} + x_1\sqrt{y}) = \frac{1}{2}(\frac{b}{\sqrt{z}} + \frac{a}{\sqrt{z}})$. Према томе, $z = \frac{a+b}{2}$; аналогно добијамо $x = \frac{b+c}{2}$ и $y = \frac{c+a}{2}$.

Заиста, тројка $(x, y, z) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ задовољава обе једначине.

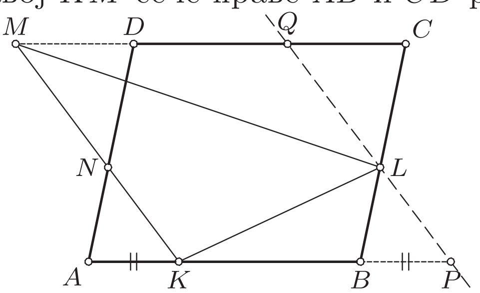
<u>*Друго решење.*</u> Дате су нам две једначине са три непознате, што сугерише да је ово задатак о неједнакостима: треба доказати да у области D : $(x, y, z > 0,\ x + y + z = a + b + c)$ важи $f(x, y, z) = 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z \leqslant abc$.

Ако је (x, y, z) тачка локалног екстремума функције f у области $x, y, z > 0$ уз услов $g(x, y, z) = x + y + z - a + b + c = 0$, онда на основу тврђења *о Лагранжовим множиоцима* постоји реалан број λ такав да је (x, y, z) стационарна тачка функције $F(x, y, z) = f - \lambda g$, тј. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

Имамо $\frac{\partial F}{\partial x} = 4yz - a^2 - \lambda$ итд. Следи да је $4yz - a^2 = 4zx - b^2 = 4xy - c^2 = \lambda$ и $x + y + z = a + b + c$. Једино решење овог система је $(x, y, z) = (\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2})$.

Најзад, остаје да испитамо границу области D, тј. када је један од бројева x, y, z нула. Тада је свакако $F < 0$. Следи да је у датој области $\max F(x, y, z) = F(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}) = abc$.

1.4. Нека права кроз тачку L паралелна правој KM сече праве AB и CD редом у тачкама P и Q. Висине у троугловима BCA и KLM су једнаке, што значи да је растојање између правих MK и PQ једнако растојању између правих AB и CD. Према томе, ове четири праве образују ромб $KPQM$, па је $KP = MK = AB$, тј. $BP = AK$. Како је због паралелности $\sphericalangle BPL = \sphericalangle AKN$ и $\sphericalangle PBL = \sphericalangle KAN$, следи да је $\triangle AKN \cong \triangle BPL$. Одатле је $BL = AN$, тј. $LN \parallel AB$.



2.1. Како је $p^a + q^b$ непаран број, бар један од бројева p и q је паран, а он мора бити једнак 2.

(i) Нека је $q = 2$. Тада $19 - b \mid 19^a - p^a = 2^b$, па је $19 - p$ степен двојке, тј. $p \in \{3, 11, 17\}$. По услову задатка једино $p = 17$ долази у обзир.

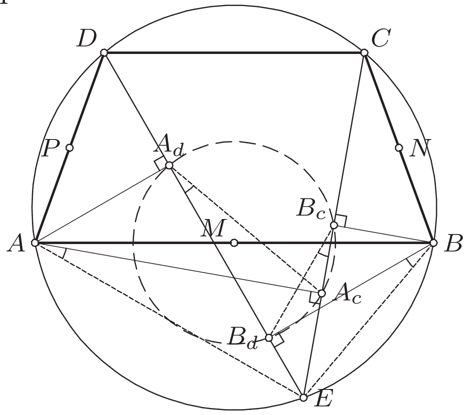
Ако $2 \mid a$, онда $19^2 - 17^2 = 72$ дели $19^a - 17^a = 2^b$, што је немогуће. С друге стране, ако $2 \nmid a$, онда је $2^{b-1} = \frac{19^a - 17^a}{19-17} = \sum_{i=0}^{a-1} 19^{a-1-i} 17^i$ непарно, што је могуће само за $b = a = 1$. Дакле, у овом случају је једино решење $(p, q, a, b) = (17, 2, 1, 1)$.

(ii) Нека је $p = 2$. Тада је $q^b = 19^a - 2^a = 17C$, где је $C = \sum_{i=0}^{a-1} 19^i 2^{a-1-i}$. Одавде следи да је $q = 17$ и да је $C = 17^k$ за неко $k \in \mathbb{N}_0$.

За $a = 1$ добијамо решење $(p, q, a, b) = (2, 17, 1, 1)$. Нека је $a > 1$. Тада $17 \mid C$. С друге стране, како је $19^i \equiv 2^i \pmod{17}$, имамо $C \equiv \sum_{i=0}^{a-1} 2^i 2^{a-1-i} = a \cdot 2^{a-1} \pmod{17}$, одакле следи да $17 \mid a$. Према томе, $19^a - 2^a$ је дељиво са $D = 19^{17} - 2^{17}$. Међутим, $D = (2 + 17)^{17} - 2^{17} = \sum_{i=0}^{17} \binom{17}{i} 2^{17-i} 17^i - 2^{17} = \sum_{i=1}^{17} \binom{17}{i} 2^{17-i} 17^i \equiv \binom{17}{1} 2^{16} \cdot 17 \pmod{17^3}$, јер су сви остали сабирци дељиви са 17^3. Према томе, D није дељиво са 17^3, али $D > 17^2$, па D не може бити степен броја 17. Следи да за $a > 1$ нема решења.

Према томе, једина решења (p, q, a, b) су $(2, 17, 1, 1)$ и $(17, 2, 1, 1)$.

2.2. Означимо са A_c и A_d редом подножја нормала из тачке A на EC и ED, а са B_c и B_d редом подножја нормала из тачке B на EC и ED.



Тачке A, E, A_c, A_d леже на кругу над пречником AE, док тачке B, E, B_c, B_d леже на кругу над пречником BE. Сада у оријентисаним угловима имамо $\sphericalangle A_cA_dB_d = \sphericalangle A_cA_dE = \sphericalangle A_cAE = 90^\circ - \sphericalangle AEC = 90^\circ - \sphericalangle DEB = \sphericalangle EBB_d = \sphericalangle EB_cB_d = \sphericalangle A_cB_cB_d$, одакле следи концикличност тачака A_c, B_c, A_d, B_d.

<u>*Друго решење.*</u> Подножја нормала означавамо као у првом решењу. Нека су M, N и P редом средишта дужи AB, BC и AD. Пошто је подножје нормале из M на ораву EC средиште дужи A_cB_c, важи $MA_c = MB_c$.

С друге стране, имамо $MN = MP$ и $NB_c = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = PA_d$. Осим тога, $\sphericalangle A_dPM = |\sphericalangle APM - \sphericalangle APA_d| = |\sphericalangle ADB - 2\sphericalangle ADE| = |2\sphericalangle BCE - \sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BNB_c - \sphericalangle BNM| = \sphericalangle B_cNM$. Следи да је $\triangle A_dPM \cong \triangle B_cNM$, па је $MA_d = MB_c$. Дакле, M је центар описаног круга $A_cA_dB_c$.

Аналогно, M је центар описаног круга троугла $A_cA_dB_d$, тако да сва четири подножја нормала леже на неком кругу са центром M.

2.3. Претпоставимо да је пресек свих скупова из фамилије $\mathcal{F}$ празан. Посматрајмо произвољан скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \mathcal{F}$. По претпоставци, ниједан од елемената $a_1, a_2, \ldots, a_k$ не налази се у свим скупова фамилије $\mathcal{F}$. Другим речима, за свако $i = 1, 2, \ldots, k$ постоји скуп $A_i \in \mathcal{F}$ који не садржи елемент a_i. Тада је пресек $k+1$ скупова $A, A_1, A_2, \ldots, A_k$ (који не морају бити различити) празан, противно услову задатка.