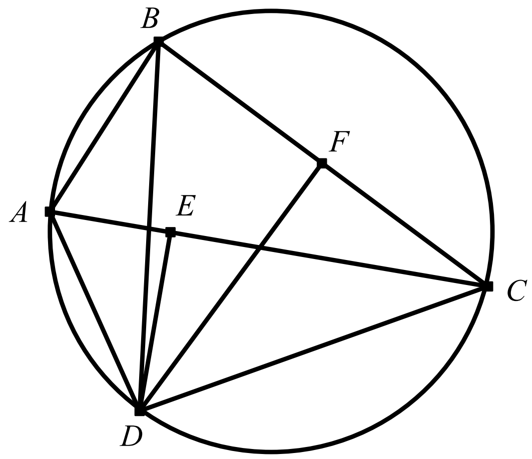
I-1. Neka je D polovište onog luka $\widehat{BC}$ opisane kružnice trokuta ABC na kojem je točka A i neka je $|AB| < |AC|$. Dokazati da nožište E okomice iz točke D na pravac AC raspolovljava izlomljenu crtu sastavljenu od dužina $\overline{BA}$ i $\overline{AC}$.

Rješenje I:



Potrebno je dokazati da je $|BA| + |AE| = |EC|$. Kako je D polovište luka $\widehat{BC}$ vrijedi $|BD| = |CD|$. Četverokut je tetivan pa za njega vrijedi Ptolomejev poučak

$$|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |AC|,$$

tj.

$$|AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot (|AC| - |AB|). \qquad (1)$$

Neka je F nožište visine iz vrha D na stranicu $\overline{BC}$; vrijedi $BF = FC$ i $\Delta AED \sim \Delta BFD$ ($\sphericalangle AED = \sphericalangle BFD = 90^0$, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBF$).

Slijedi

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|BF|} = \frac{|DB|}{\frac{|BC|}{2}},$$

tj.

$$|AD| \cdot |BC| = 2 \cdot |DB| \cdot |AE|. \qquad (2)$$

Izjednačavanje lijevih strana u (1) i (2) dobivamo

$$|AC| - |AB| = 2 \cdot |AE|,$$

$$|AE| + |EC| - |AB| = 2 \cdot |AE|,$$

$$|EC| = |AE| + |AB|.$$

Rješenje II:

Neka je $\gamma = \sphericalangle BCD$. Iz pravouglog trougla EAD i sinusne teoreme za trougao ADB slijedi

$$EA = AD \cdot \cos\gamma = 2R \cdot \sin\sphericalangle ACD \cdot \cos\gamma.$$

Iz pravouglog trougla EDC i sinusne teoreme za trougao BDC slijedi

$$EC = CD \cdot \cos\sphericalangle ACD = 2R \cdot \sin\gamma \cdot \cos\sphericalangle ACD\,.$$

Sada kombinovanjem ova dva izraza slijedi

$$EC - EA = 2R \cdot \sin(\gamma - \sphericalangle ACD) = 2R \cdot \sin\sphericalangle ACB = AB.$$

I-2. Dokazati da vrijedi

$\frac{a^3}{b^2+c} + \frac{b^3}{c^2+a} + \frac{c^3}{a^2+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

za sve pozitivne brojeve a, b, c koji zadovoljavaju uslov $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Rješenje:

Primjenimo Košijevu nejednakost, dobijamo

$(a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b))(\frac{a^3}{b^2+c} + \frac{b^3}{c^2+a} + \frac{c^3}{a^2+b}) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 = 1$

pa je dovoljno dokazati

$ab^2 + bc^2 + ca^2 + ac + ba + cb \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + 1.$

Lako se vidi da je

$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1.$

Dalje, primjenimo opet Košijevu nejednakost

$ab^2+bc^2+ca^2 \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

pa je dovoljno dokazati da je

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq \frac{1}{3},$

a poslednja nejednakost vrijedi jer je

$3a^2b^2 + 3b^2c^2 + 3c^2a^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2.$

Jednakost vrijedi za $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

I-3. Ako je p neparan prost broj onda postoji prirodan broj m, $1 \leq m < p$, tako da vrijedi

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

za neke cijele brojeve x_1, x_2 i x_3.

Rješenje:

Neka je $x_1, x_2 \in \left\{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$ i $x_1 \neq x_2$. Pretpostavimo da vrijedi $x_1^2 \equiv x_2^2 \ (mod\, p)$. Odavde slijedi da mora da vrijedi $p | x_1 - x_2$ ili $p | x_1 + x_2$. No, $p > x_1 - x_2$ i $p > x_1 + x_2$, pa je to kontradikcija sa pretpostavkom $x_1^2 \equiv x_2^2 \ (mod\, p)$. Dakle, $x_1^2 \not\equiv x_2^2 \ (mod\, p)$.

Dakle, za $y_1, y_2 \in \left\{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$ i $y_1 \neq y_2$ vrijedi $-1 - y_1^2 \not\equiv -1 - y_2^2$.

Sada od $p + 1$ brojeva $\left\{x_0^2, x_2^2, \dots, x_{\frac{p-1}{2}}^2, -1 - y_0^2, -1 - y_2^2, \dots, -1 - y_{\frac{p-1}{2}}^2\right\}$ $(x_i, y_i \in \left\{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$ i $x_i \neq x_j, y_k \neq y_l$ za $i \neq j$, $k \neq l)$ prema Dirichlet principu moraju postojati dva koja daju isti ostatak pri djeljenju sa p, tj. mora da vrijedi

$$x_s^2 \equiv -1 - y_t^2 \ (mod\, p),$$

tj.

$$x_s^2 + y_t^2 + 1 = mp,$$

pri čemu vrijedi

$$0 < mp < \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1 = \frac{p^2}{2} + 1 < p^2,$$

tj. $1 \leq m < p$.

II-1. Neka funkcija $f : N \to N$ zadovoljava uslove

(a) $f(1) = p + 1$

(b) $f(n+1) = f(1)f(2)...f(n) + p$

gde je p prost broj. Odrediti p tako da postoji $k \in N$ takvo da je $f(k)$ potpun kvadrat.

Rješenje:

Ispitajmo prvo kada je $f(1)$ potpun kvadrat. Tada je $p+1 = m^2 \Rightarrow p = 3$

Dalje ispitajmo kada je $f(2)$ potpun kvadrat. Pošto jednačina $2p+1 = m^2$ nema rješenja zaključujemo da $f(2)$ ne može biti potpun kvadrat nikada.

Dalje posmatrajmo $f(3)$, jednačina $2p^2+4p+1 = m^2$ nema rješenja nikada jer za $p \neq 2$ lijeva strana daje ostatak 2 pri deljenju sa 4.

Posmatrajmo sada $f(n), n \geq 4$ lako primjećujemo da je $f(n) \geq p^4$, još vidimo da vrijedi $f(n) = f^2(n-1) - pf(n-1) + p$.

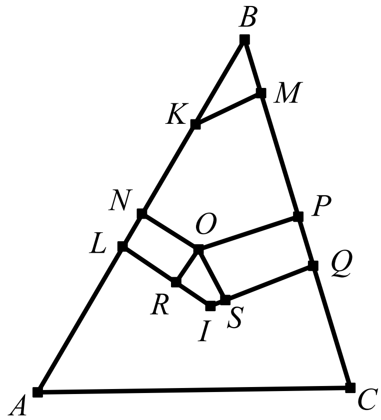
Pretpostavimo da je $f(n) = k^2$ potpun kvadrat. Tada vrijedi

$$f^2(n-1) - pf(n-1) + p - k^2 = 0 \Rightarrow p^2 - 4p = (l-2k)(l+2k), l \in N$$

Za $p > 3$ imamo $(l-2k)(l+2k) > 2p^2$ kontradikcija. Za $p = 3$ smo dobili da je $f(1)$ kvadrat, a za $p = 2$ lako se pokaže da nema potpunih kvadrata.

II-2. Zadan je trougao ABC. Na polupravim AB i CB odabrane su tačke K i M, respektivno, tako da vrijedi $AK = CM = AC$. Dokazati da je poluprečnik kružnice opisane oko trougla BKM jednak IO, pri čemu je I centar upisane kružnice, a O centar opisane kružnice zadanog trougla, te da je $IO \perp KM$.

Rješenje:



Neke su N i P podnožja normala iz tačke O na stranice AB i AC, respektivno, i neka su L i Q podnožja normala iz tačke I na AB i AC, respektivno.

Imamo da vrijedi:

$$BK = c - b,$$

$$BM = a - b,$$

$$BN = \frac{c}{2},$$

$$BP = \frac{a}{2},$$

$$BL = BQ = s - b,$$

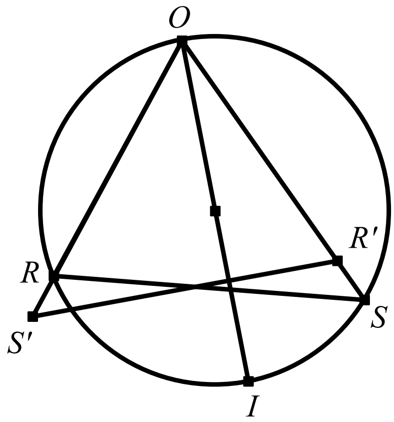
$$NL = AN - AL = \frac{c}{2} - (s - a) = \frac{a - b}{2},$$

$$PQ = \frac{c - b}{2}.$$

Neka su R i S tačke na IL i IQ, respektivno, tako da je $OR || AB$ i $OS || BC$. Tada je i $OR \perp IL$ i $OS \perp QI$.

Odavde slijedi da je $\sphericalangle ROS = \sphericalangle KBM$ (uglovi sa paralelnim kracima) i $\Delta ORS \sim \Delta BKM$ (ugao i jednaki omjeri stranica koje grade taj ugao). Kako se stranice odnose u omjeru $\frac{1}{2}$ slijedi da je koeficijent sličnosti jednak $k = \frac{1}{2}$.

Kako je OI prečnik u tetivnom četverouglu $ORIS$ i kako je $k = \frac{1}{2}$ slijedi da je prečnik kružnice oko trougla BKM jednak $2OI$, tj. poluprečnik kružnice opisane oko trougla BKM jednak je OI.



Pretpostavimo sada da je $OS' = OS$ i $OR' = OR$, pri čemu su S' i R' na OR i OS, respektivno. Sada je $\Delta OR'S' \sim \Delta BKM$ i OR' je proprcionalno sa BM, a OS' je proporcionalno sa BK. Odavde slijedi da je $KM || R'S'$.

Sada je dovoljno dokazati da vrijedi $IO \perp R'S'$.

$$\sphericalangle IOR' + \sphericalangle S'R'O = \sphericalangle IOS + \sphericalangle SRO = \sphericalangle IOS + \sphericalangle SIO = 90^0,$$

pri čemu je zbog podudarnosti $\sphericalangle S'R'O = \sphericalangle SRO$.

II-3. Kvadrat stranice 1 podijeljen je na regione. Rubove svih regiona grade linijski segmenti paralelni sa stranicama kvadrata. Ukupna dužina unutrašnjih segmenata jednaka je $2n$. Dokazati da mora postojati barem jedan region sa površinom većom ili jednakom od $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Rješenje:

Pretpostavimo da je kvadrat podijeljen na regione $R_1, R_2, \dots, R_m$. Neka su P_{R_i} i O_{R_i} površina i obim regiona R_i, respektivno.

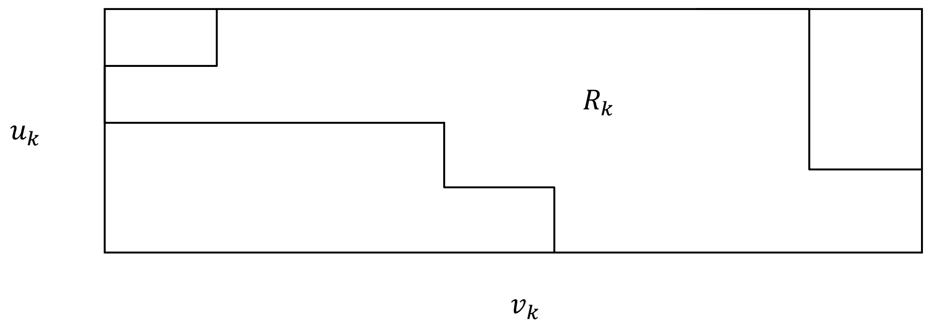
Imamo da vrijedi

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_{R_i},$$

$$4 + 2 \cdot 2n = \sum_{i=1}^{m} O_{R_i},$$

(svaki segment iz unutrašnjosti participira u obimu dva regiona).

Posmatrajmo sada neki region R_k.



Opišimo minimalan pravougaonik oko regiona R_k i neka su stranice ovog pravougaonika u_k i v_k.

Sada vrijedi

$$P_{R_k} \leq u_k \cdot v_k \leq \frac{(u_k + v_k)^2}{4},$$

$$O_{R_k} \geq 2(u_k + v_k),$$

tj.

$$\sqrt{P_{R_k}} \leq \frac{u_k + v_k}{2} \leq \frac{O_k}{4}.$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{P_{R_i}} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{m} O_{R_i} = \frac{4n+4}{4} = n + 1.$$

Pretpostavimo sada suprotno tvrdnji zadatka, tj. neka je $P_{R_i} < \frac{1}{(n+1)^2}$ za sve regione R_i. U skladu sa ovom pretpostavkom imamo da vrijedi

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_{R_i} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{P_{R_i}} \cdot \sqrt{P_{R_i}} < \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{P_{R_i}} \leq \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) = 1,$$

što nije moguće.

Dakle, mora postojati bar jedan region sa površinom većom ili jednakom od $\frac{1}{(n+1)^2}$.

REZULTATI SA MOBIH 2012										
Rank	**Ime i prezime**	**Škola**	**Razred**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Ukupno**
1	Harun Hindija	Sarajevo koledž	IV	7	7	7	7	7	0	**35**
2	Ratko Darda	Gimnazija Prijedor	IV	7	7	7	7	4	0	**32**
3	Hamza Merzić	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	IV	7	7	2	7	0	3	**26**
4	Marko Rajković	Gimnazija Nevesinje	III	7	5	1	7	0	1	**21**
4	Sead Delalić	II gimnazija Sarajevo	IV	7	7	0	7	0	0	**21**
6	Abdulah Jašarević	Sarajevo koledž	II	7	2	0	7	4	0	**20**
7	Adnan Ibrić	Gimnazija Lukavac	III	7	2	0	2	7	1	**19**
7	Marko Palangetić	SŠC Vlasenica	III	7	0	0	7	4	1	**19**
9	Slavko Ivanović	Gimnazija Zvornik	III	7	0	0	7	4	0	**18**
9	Vladimir Ivković	Gimnazija Aleksa Šantić Nevesinje	IV	7	3	0	7	0	1	**18**
11	Dejan Gvozdenac	Gimnazija Banja Luka	III	7	0	1	7	0	1	**16**
12	Lamija Kujan	Srednja međunarodna škola Sarajevo	II	6	0	2	7	0	0	**15**
12	Esma Mujkić	Sarajevo koledž	IV	7	7	0	1	0	0	**15**
12	Eldin Nišić	Sarajevo koledž	IV	7	7	0	1	0	0	**15**
15	Mladen Pejić	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	III	7	0	0	7	0	0	**14**
15	Edin Husić	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	IV	7	0	0	7	0	0	**14**
17	Anja Švraka	Gimnazija Banja Luka	II	7	0	0	4	0	0	**11**
17	Ivona Jurošević	Gimnazija Bratunac	II	4	0	0	7	0	0	**11**
19	Hadžem Hadžić	Sarajevo koledž	III	3	0	0	7	0	0	**10**
20	Milica Đukić	Gimnazija Prnjavor	I	7	0	0	2	0	0	**9**
20	Mirza Arnaut	Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić" Gračanica	I	7	0	0	2	0	0	**9**
22	Ema Hujić	II gimnazija Sarajevo	III	7	0	0	0	0	0	**7**
22	Selver Sadiković	Koledž Bihać	III	0	0	0	7	0	0	**7**
24	Rijad Muminović	II gimnazija Sarajevo	II	3	0	0	3	0	0	**6**
25	Slaven Bajić	Gimnazija Banja Luka	I	5	0	0	0	0	0	**5**
25	Ivan Bartulović	Franjevačka klasična gimnazija Visoko	III	1	3	0	0	1	0	**5**
27	Nevena Mitrović	Gimnazija Gradiška	IV	2	0	0	2	0	0	**4**
27	Robert Matičević	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	IV	0	0	0	3	0	1	**4**
29	Miloš Tomić	Gimnazija Gradiška	II	1	0	0	2	0	0	**3**
30	Adnan Kreho	Srednja međunarodna škola Sarajevo	I	2	0	0	0	0	0	**2**
30	Zoran Šukurma	Srenja škola Nikola Tesla Brod	II	2	0	0	0	0	0	**2**
32	Ehvan Građanin	Srednja strukovna škola Jajce	I	0	0	0	0	0	0	**0**
32	Tea Jozić	Gimnazija Livno	II	0	0	0	0	0	0	**0**
32	Stanko Čolak	Gimnazija fra Dominik Mandić Široki Brijeg	III	0	0	0	0	0	0	**0**
32	Stipe Jurčević	Gimnazija Tomislavgrad	III	0	0	0	0	0	0	**0**