53. takmičenje mladih matematičara Bosne i Hercegovine

18. matematička olimpijada BiH

Visoko, 18. 5. 2013. godine

I dan

1. Neka je ABC pravougli trougao (ugao kod vrha C je prav) i neka simetrale unutrašnjih uglova kod vrhova A i B sijeku naspramne katete u tačkama M i N redom. Visina CH siječe prave AM i BN redom u tačkama P i Q. Dokazati da je prava koja prolazi kroz središta duži QN i PM paralelna hipotenuzi AB.

2. Dat je niz sa $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4$ za prirodan broj $n \geq 1$. Pokazati da su svi članovi ovog niza potpuni kvadrati.

3. Dokazati da se u skupu od $\binom{2n}{n}$ ljudi, n prirodan broj, može naći $n+1$ ljudi koji se svi međusobno poznaju ili $n+1$ ljudi koji se svi međusobno ne poznaju.

Vrijeme za rad: 4 sata.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

S R E T N O !

53. takmičenje mladih matematičara Bosne i Hercegovine

18. matematička olimpijada BiH

Visoko, 19. 5. 2013. godine

II dan

4. Odrediti sve proste brojeve p i q za koje vrijedi $p|30q-1$ i $q|30p-1$.

5. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj i neka su $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ realni brojevi za koje vrijedi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Označimo
$$F_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1).$$
Dokazati da je:
a) $minF_3 = -1/3$, b) $minF_4 = -1/4$, c) $minF_5 = -1/5$.

6. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC. Na dužima IA, IB, IC odabrane su tačke P, Q, R redom tako da vrijedi
$$IP \cdot IA = IQ \cdot IB = IR \cdot IC.$$
Dokazati da Eulerova prava za trougao PQR sadrži tačke I i O, pri čemu je O centar opisane kružnice trougla ABC.

Vrijeme za rad: 4 sata.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

S R E T N O !

18. matematička olimpijada BiH

Visoko, 18. 5. 2013. godine

I dan

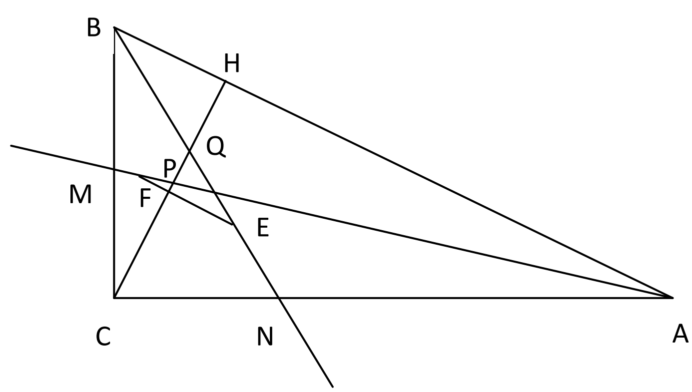
Rješenja zadataka

1. Neka su F i E polovišta dužina $\overline{MP}$ i $\overline{NQ}$ redom.

Označimo kutove $\measuredangle MAC = \measuredangle MAB = \frac{\alpha}{2}$. Iz pravokutnih trokuta AMC i APH slijedi $\measuredangle CMA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \measuredangle APH = \measuredangle CPM$. Odavde je trokut CPM jednakokračan i $\overline{CF} \perp \overline{MP}$. Kako je $\measuredangle CFA = \measuredangle CHA = 90^\circ$, to se točke C, F, H i A nalaze na istoj kružnici, pa je

$$\measuredangle FCH = \measuredangle FAH = \measuredangle FAC = \measuredangle FHC.$$

Slijedi da je trokut CFH jednakokračan i $|FC| = |FH|$. Zaključujemo da se točka F nalazi na simetrali dužine $\overline{CH}$. Analogno, može se pokazati da se i točka E nalazi na simetrali dužine $\overline{CH}$. Stoga je $\overline{EF} \perp \overline{CH}$, a to povlači da je $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$.



2. Kako je rekurzija nehomogena potražimo rješenje u obliku $a_n = b_n + C$, gdje je C odgovarajuća konstanta. Uvrštavajući u početnu rekurziju dobijamo $b_{n+1} + C = 14(b_n + C) - (b_{n-1} + C) - 4$,

$b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1} + 12C - 4$, odakle slijedi da je $C = \frac{1}{3}$. Sada je $b_0 = b_1 = \frac{2}{3}$. Karakteristična jednačina je $t^2 - 14t + 1 = 0$ čija su rješenja $t_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

Time je $b_n = \alpha\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n + \beta\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n$. Uvrštavajući $n = 0, 1$ dobijamo sistem

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}$$

$$\alpha\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^1 + \beta\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

čija su rješenja $\alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$, $\beta = \frac{2-\sqrt{3}}{6}$. Sada je

$$a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{6}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^n + \frac{2-\sqrt{3}}{6}\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{3}.$$

Primijetimo da je $7 - 4\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$, pa je

$$a_n = \frac{1}{6}\left(2 - \sqrt{3}\right)^{2n-1} + \frac{1}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2n-1} + \frac{1}{3}.$$

Dalje je $2 - \sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}$, pa odatle

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^{4n-2}}{6\cdot 2^{2n-1}} + \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^{4n-2}}{6\cdot 2^{2n-1}} + \frac{1}{3} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^{4n-2} + 2\cdot 2^{2n-1} + \left(\sqrt{3}+1\right)^{4n-2}}{6\cdot 2^{2n-1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^{4n-2} + 2\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n-1}\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n-1} + \left(\sqrt{3}+1\right)^{4n-2}}{3\cdot 2^{2n}}$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n-1} + \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n}\right)^2.$$

Pokažimo da je $c_n = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n-1} + \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n}$ uvijek cijeli broj.

$$c_n = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}\right)^n$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)^n.$$

Kako su $2 - \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$ rješenja kvadratne jednačine $x^2 - 4x + 1 = 0$, to je c_n rješenje rekurentne relacije $c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}$ sa početnim uslovima $c_0 = c_1 = 1$. Odavde slijedi da je c_n cijeli broj i $a_n = c_n^2$.

3. Dokažimo opštiji rezultat: U skupu od $\binom{p+q}{p}$ ljudi, p i q prirodni brojevi, možemo naći $p+1$ ljudi koji se svi međusobno poznaju ili $q+1$ ljudi koji se svi međusobno ne poznaju. Dokaz provodimo indukcijom po $p+q$.

Ako je $p+q=2$, tj. $p=q=1$, tvrdnja je očigledna.

Pretpostavimo da imamo skup od $\binom{p+q}{p}$ ljudi. Uočimo u njemu čovjeka A. Imamo nekoliko slučajeva.

Prvi slučaj. Ako A poznaje bar $\binom{(p-1)+q}{p-1}$ ljudi, onda se na osnovu induktivne pretpostavke između poznanika od A može naći p ljudi koji se svi poznaju i koji zajedno sa A čine traženih $p+1$ ljudi, ili postoji $q+1$ ljudi koji se svi međusobno ne poznaju i tvrdnja opet vrijedi.

Drugi slučaj. Ako A ne poznaje bar $\binom{p+(q-1)}{p}$ ljudi, onda se na osnovu induktivne pretpostavke između osoba koje ne poznaju A može naći $p+1$ ljudi koji se svi međusobno poznaju ili q ljudi koji se svi međusobno ne poznaju, koji zajedno sa A čine traženih $q+1$ ljudi koji se međusobno ne poznaju i tvrdnja vrijedi.

Treći slučaj. Slučaj kada A poznaje ne više od $\binom{(p-1)+q}{p-1}-1$ ljudi i ne poznaje ne više od $\binom{p+(q-1)}{p}-1$ ljudi nije moguć jer je

$$\binom{(p-1)+q}{p-1}-1+\binom{p+(q-1)}{p}-1=\binom{p+q}{p}-2<\binom{p+q}{p}-1.$$

18. matematička olimpijada BiH

Visoko, 19. 5. 2013. godine

II dan

Rješenja zadataka

4. Primijetimo da je $NZD(pq, 30) = 1$, odnosno $p, q \neq 2, 3, 5$. Iz uslova se lako dobija

$$pq|30(p+q)-1.$$

Odavde zaključujemo da postoji prirodan broj n takav da je $NZD(n, 30) = 1$ i za koji važi

$$pqn = 30(p+q) - 1.$$

Posmatramo sljedeće slučajeve:

1° $n = 1$

Jednačina postaje $pq = 30(p+q) - 1$ koja je ekvivalentna sa

$$(p-30)(q-30) = 899 = 29 \cdot 31 = 1 \cdot 899.$$

Odavde dobijamo rješenja $(p, q) \in \{(59, 61), (61, 59), (31, 929)(929, 31)\}$.

2° $n > 1$ odakle slijedi $n \geq 7$ (jer je $NZD(n, 30) = 1$).

Sada imamo

$$7pq \leq pqn = 30(p+q) - 1 < 30(p+q).$$

Zbog simetrije možemo uzeti da je $p \leq q$. Dijeljenjem posljednje nejdnakosti sa $30pq$ dobijamo

$$\frac{7}{30} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{p}.$$

Odavde je $p \leq \frac{60}{7} < 9$, a kako je $p \geq 7$ (zbog $p, q \neq 2, 3, 5$), to mora biti $p = 7$. Sada

$$7|30q - 1 \text{ i } q|30 \cdot 7 - 1 = 209 = 11 \cdot 19.$$

Odavde je $q = 11$ ili $q = 19$. Drugi slučaj otpada jer broj $30 \cdot 19 - 1 = 569$ nije djeljiv sa 7. Dakle, u ovom slučaju jedina rješenja su $(p, q) \in \{(7, 11), (11, 7)\}$.

Sva rješenja su data sa $(p, q) \in \{(7, 11), (11, 7), (59, 61), (61, 59), (31, 929)(929, 31)\}$.

5.

a)
$$F_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$$
$$= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq$$
$$\geq \tfrac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 1 = -\tfrac{1}{3}.$$

Jednakost se može dostići za $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$. Koristili smo AK nejednakost.

b)
$$F_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4x_1 =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \geq$$
$$\geq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2\frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Koristili smo nejednakosti AK i AG. Jednakost vrijedi $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$.

c) Neka je $A = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$ i $B = x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_1 + x_5x_2$. Nejednakost

$$F_5 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4x_5 - 2x_5x_1 \geq -\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow 1 - 4A - 2B \geq -\frac{1}{5}$$
$$\Leftrightarrow 2A + B \leq \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow 2A + B \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2A + 2B - \frac{2}{5}$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{2}{5} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + B.$$

Posljednja nejdnakost slijedi iz

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_1 + x_5x_2 =$$
$$\frac{1}{2}[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 + x_5)^2 + (x_4 + x_1)^2 + (x_5 + x_2)^2] \geq$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}[x_1 + x_3 + x_2 + x_4 + x_3 + x_5 + x_4 + x_1x_5 + x_2]^2 = \frac{2}{5}.$$

Primijenili smo na kraju nejednakost AK. Jednakost vrijedi za $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \frac{1}{5}$.

6. Iz uvjeta zadatka $\frac{|IP|}{|IB|} = \frac{|IQ|}{|IA|}$ slijedi $\Delta IPQ \sim \Delta IBA$, a odavde da je četverokut $ABQP$ tetivan, pa je $\measuredangle IPQ = \frac{\beta}{2}$ i $\measuredangle IQP = \frac{\alpha}{2}$. Analogno dobivamo da su četverokuti $BCRQ$ i $ACRP$ tetivni. Slijedi da su kutovi trokuta PQR

$$\measuredangle RPQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \measuredangle PQR = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \measuredangle QRP = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Iz jednakosti $\measuredangle IPQ + \measuredangle PQR = 90^\circ$, dobivamo da je $\overline{PI} \perp \overline{RQ}$, pa je točka I ortocentar trokuta PQR.

Neka je S središte opisane kružnice trokutu PQR i C', B', A' središta opisanih kružnica četverokutima $ABQP$, $ACRP$, $BCRQ$ redom. Kako točke A' i B' leže na simetrali dužine $\overline{CR}$, vrijedi $\overline{A'B'} \parallel \overline{PQ}$. Slično imamo $\overline{B'C'} \parallel \overline{RQ}$ i $\overline{A'C'} \parallel \overline{PR}$.

Koristeći jednakost kutova sa okomitim kracima dobivamo $\measuredangle OB'C' = \measuredangle IAC = \frac{\alpha}{2}$ i $\measuredangle OC'B' = \measuredangle IAB = \frac{\alpha}{2}$. Slijedi da je O središte opisane kružnice trokutu $A'B'C'$. Trokuti $A'B'C'$ i PQR su homotetični (sa središtem homotetije u presjeku pravaca $A'P, B'Q$ i C'R). Točka S je ortocentar trokuta $A'B'C'$ i središte opisane kružnice trokuta PQR. Dakle, središte homotetije leži na presjeku pravaca SI i OS, te su točke S, I i O kolinearne.