ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА БАЛКАНСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Источно Сарајево, 21.04.2016.

1. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = AD$. Тачке M и N су на страницама CD и BC, редом, тако да важи $DM + BN = MN$. Доказати да центар круга описаног око троугла AMN припада дужи AC.

2. Бројеви 1117 и 1171 су прости, а бројеви 1711 и 7111 су сложени ($1711 = 29 \cdot 59$, $7111 = 13 \cdot 547$). Доказати да се за свако $n \geq 2$ међу бројевима који се записују помоћу n јединица и једне седмице налази бар један сложен број.

3. Дати су узајамно прости природни бројеви m и n. У сваком пољу бесконачне шаховске табле записан је по један реалан број тако да важи: збир бројева у сваком правоугаонику $m \times n$ или $n \times m$ једнак је нули. Доказати да су бар два од записаних бројева међусобно једнаки.

4. Доказати неједнакости

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{3n-2}{3n-1} < \frac{1}{\sqrt[3]{7n}}\,.$$

РЈЕШЕЊА

1. На продужетку дужи CD преко D узмимо тачку K тако да је $DK = BN$. Троуглови KDA и NBA су подударни, јер је $\angle KDA = \angle NBA$, $KD = BN$ и $DA = AB$. Слиједи да је $KA = NA$, $KM = DK + DM = BN + DM = NM$, па су троуглови KMA и NMA подударни. Одатле је $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle DAB$. Нека су O, C пресјечне тачке дужи AC са кружницом описаном око троугла MCN. Како је $\angle MCO = \angle DCA = \angle BCA = \angle NCO$, добијамо да је $MO = NO$. Осим тога је

$$\angle MON = 180^\circ - \angle MCN = 180^\circ - \angle DCB = \angle DAB = 2\angle MAN.$$

Из ове једнакости и $MO = NO$ слиједи да је O центар описане кружнице троугла MAN.

2. Ако је $n = 2m$ паран број тада је

$$9 \cdot 7\underbrace{11\ldots 1}_{2m} = 63\underbrace{99\ldots 9}_{2m} = (8\underbrace{0\ldots 00}_{m})^2 - 1 =$$

$$= 8\underbrace{0\ldots 0}_{m-1}1 \cdot 7\underbrace{9\ldots 9}_{m} = 9 \cdot \underbrace{8\ldots 8}_{m-1}9 \cdot 7\underbrace{9\ldots 9}_{m},$$

па је $711\ldots 1 = 8\ldots 89 \cdot 79\ldots 9$ сложен број.

Ако је $n = 6m + 5$ тада је збир цифара сваког од тих бројева једнак $6m + 5 + 7 = 6(m + 2)$, па је сваки број дјељив са 3 (и самим тим сложен).

Ако је $n = 6m + 3$ тада је број $711\ldots 1$ дјељив са 13 (јер су 7111 и 111111 дјељиви са 13).

Ако је $n = 6m+1$ тада је број $111711\ldots 1$ дјељив са 7 (јер су 11171111 и 111111 дјељиви са 7).

Примједба. У ствари је доказано јаче тврђење, да је сложен бар један од бројева $711\ldots 1$ и $111711\ldots 1$.

3. Како су m и n узајамно прости бројеви, то се при дијељењу бројева

$$m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots,\ (n-1)m$$

са бројем n добијају сви остаци $1,\ 2\ ,\ldots, n - 1$. Према томе, за неко $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ број $km+1$ је дјељив са n, па је и број $mn-(km+1)$ дјељив са n, тј. $mn - 1 = km + ln$, гдје је l природан број.

Уведимо на шаховској табли правоугли координатни систем, тако да су тачке са цијелим координатама тјемена поља те табле. Квадрат $ABCD$ са тјеменима $A(0, 0)$, $B(mn, 0)$, $C(mn, mn)$, $D(0, mn)$, може се разбити на правоугаонике димензије $m \times n$ или $n \times m$. Зато је збир бројева који су записани унутар квадрата $ABCD$ једнак нули. Уведимо сљедеће ознаке

$$B_1(mn - 1, 0),\ B_2(km, 0),\ C_1(mn - 1, mn),\ C_2(km, mn).$$

Тада се сваки од правоугаоника AB_2C_2D и $B_2B_1C_1C_2$ може разбити на правоугаонике димензије $m\times n$ или $n\times m$. Зато је збир свих бројева који су записани унутар правоугаоника AB_1C_1D једнак нули, а то даље значи да је збир бројева који су записани унутар правоугаоника B_1BCC_1 једнак нули. Аналогно доказујемо да исто својство има и правоугаоник FEE_1F_1, гдје је

$$F(mn, 1),\ F_1(mn - 1, 1),\ E(mn, mn + 1),\ E_1(mn - 1, mn + 1).$$

Према томе, у пољима BFF_1B_1 и CEE_1C_1 записан је исти број.

4. Докажимо прво лијеву неједнакост. Она се лако доказује математичком индукцијом.

За $n = 1$ важи једнакост $1/2 = 1/2$. Из претпоставке да лијева неједнакост важи за n, довољно је још доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}} \leq \frac{3n+1}{3n+2}.$$

Ова неједнакост важи, јер је након кубирања и сређивања еквивалентна са $0 \leq 2n+1$.

Да бисмо доказали десну неједнакост, доказаћемо математичком индукцијом јачу неједнакост

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{3n-2}{3n-1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}.$$

За $n = 1$ важи једнакост $1/2 = 1/2$. Из претпоставке да ова неједнакост важи за n, довољно је још доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{3n+1}{3n+2} \leq \frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}}.$$

Посљедња неједнакост важи, јер је након кубирања и сређивања еквивалентна са $0 \leq 27n^2 + 13n$. $\square$