ПРВО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 02.04.1994.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако за цијеле бројеве a, b, c, d вриједи $ab - cd = 12$, $ad + bc = 43$, доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1994$.

2. У троуглу ABC се висина AD и симетрала BE угла ABC сијеку у тачки S $(D \in BC, E \in AC)$. Ако је $AS = 2\,SD$, $BS = SE$, наћи углове тог троугла.

3. Свако тјеме и центар правилног шестоугла обојени су једном од двије боје. Доказати да постоји једнакостранични троугао или правоугаоник, чија су сва тјемена исте боје.

4. Ако је n природан број доказати да једначине

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{n}$$

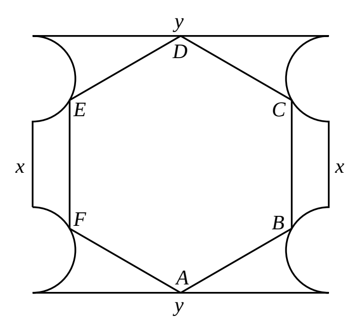
имају једнак број рјешења у скупу природних бројева ако и само ако је n непаран.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x-x^2} + \sqrt{2x^2-x-1} = 1.$$

2. Дат је билијарски сто као на слици 1, гдје су лукови полукружнице полупречника 1. Одредити дужине x и y тако да играч билијара може из неке тачке стола упутити куглу која ће прећи пут правилног шестоугла $ABCDEFA$ као на слици 1.



Слика 1:

(Куглу сматрамо тачком која се креће праволинијски и одбија се од кружнице или праве тако да је упадни угао једнак одбојном углу.)

3. Нека су p и q различити прости бројеви. Доказати да једначина $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{p}{q}$ има рјешења у скупу природних бројева ако и само ако $p \mid q + 1$.

4. Ако је $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ бијекција са особином

$$f(1) < 2f(2) < \cdots < nf(n)$$

доказати да је f идентитет.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Правилан петоугао странице a и дијагонале d уписан је у круг јединичног полупречника. Доказати да је $a^2 + d^2 = 5$.

2. У равни је дата цјелобројна мрежа. Доказати да је сваки конвексни четвороугао јединичне површине, чија су тјемена чворови мреже, паралелограм.

3. Нека је n природан број и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сви природни дјелиоци броја n, изузев n. Ако је $k \geq 3$ и

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$$

доказати да је $n = p(2p-1)$, гдје су p и $2p-1$ прости бројеви.

4. Нека је

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{n^2 + k} - 2n^2.$$

Доказати да је $\lfloor S_n \rfloor = n$, $\lfloor 2S_n \rfloor = 2n$.

(Са $\lfloor x \rfloor$ је означен цијели дио од x, тј. највећи цио број који није већи од x.)

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ако су m, n, k природни бројеви и $m < n < k$ доказати да је

$$\left(1 - \frac{m}{k}\right)^n > \left(1 - \frac{n}{k}\right)^m.$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Ако сви природни дјелиоци броја n, изузев n, образују аритметичку прогресију (са бар 3 члана) доказати да је $n = p(2p-1)$, гдје су p и $2p-1$ прости бројеви.

4. Ако су сва рјешења једначине

$$x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\, x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_n = 0 \quad (n > 2)$$

цијели бројеви доказати да је

$$a_k = \binom{n}{k}, \quad k \in \{3, 4, \ldots, n\}.$$

ДРУГО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Приједор, 01.04.1995.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да за позитивне бројеве a и b вриједи

$$\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2} \leq \frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

2. У јединична поља квадрата 4×4 уписани су бројеви 1 и -1 тако да је у свако поље уписан број једнак производу бројева у њему сусједним пољима. Доказати да су сви уписани бројеви једнаки 1.

(Два поља су сусједна ако им ивице имају заједничку тачку.)

3. Нека је O центар описане кружнице, S центар уписане кружнице и H ортоцентар правоуглог троугла. Доказати да је $\sphericalangle OSH > 135^\circ$.

4. Доказати да једначина $x^2+y^2=2$ има бесконачно много рјешења у скупу рационалних бројева.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека је n природан број већи од 12. У децималном запису броја $\sqrt{n^2+n}$ одредити прве двије цифре иза децималног зареза.

2. Нека је T тежиште, а S центар уписане кружнице троугла ABC. Ако је $\overrightarrow{AC}=12\,\overrightarrow{TS}$ доказати да је тај троугао „египатски" тј. да му је однос страница 3 : 4 : 5.

3. Доказати да се за $n>1$ скуп $\{1,2,3,\ldots,3n\}$ може разбити на 3 дисјунктна подскупа са по n елемената и једнаким сумама елемената.

4. Квадрат странице 9 покривен је са 27 правоугаоника формата 3×1 (*тримино* фигурама). Доказати да 3 од њих покривају неки квадрат странице 3.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ријешити једначину

$$\cos x+\cos 2x+\cos 4x+4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=0.$$

Наћи сва рјешења која припадају интервалу $(-\pi,\pi)$.

2. Одредити број рјешења једначине

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{1995}$$

у скупу природних бројева.

3. Нека је r полупречник уписане кружнице троугла ABC, D средиште странице AB и S_1, S_2 центри кружница уписаних у троуглове CDA и CDB. Доказати да је

$$r < S_1S_2 < \frac{AB}{2}\,.$$

4. У равни са цјелобројном мрежом дат је конвексан шестоугао чија су тјемена чворови мреже, а површина једнака 3. Доказати да је он централно симетричан.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су a и d релативно прости природни бројеви и нека аритметичка прогресија

$$a, a+d, \ldots, a+nd, \ldots$$

садржи неки степен природног броја q. Доказати да она садржи бесконачну геометријску прогресију чији су сви чланови степени броја q.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Доказати да за природне бројеве n, m $(n > m)$ вриједи

$$(n-m)^{n-m} \cdot n^{n(m-1)} \geq (n-1)^{m(n-1)}.$$

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ТРЕЋЕ РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 30.03.1996.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нормале из тјемена A и B оштроуглог троугла ABC на његове наспрамне странице сијеку кружницу описану око тог троугла у тачкама D и E редом. Ако је $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, доказати да је четвороугао $ABDE$ једнакокраки трапез.

2. Нека су a, b, c, d бројеви из интервала $[200, 300]$, а K, L, M тачке на бројној оси које редом одговарају бројевима

$$\frac{a}{b}\,, \quad \frac{c}{d}\,, \quad \frac{a+c}{b+d}$$

и N средиште дужи KL. Доказати да је $MN \leq \dfrac{KL}{10}$.

3. Ако је n природан број, доказати да $2^n + 3^n$ није потпун квадрат.

4. Нека су a, b катете и r полупречник уписане кружнице правоуглог троугла. Ако су a, b, $\dfrac{a}{r}$ и $\dfrac{b}{r}$ цијели бројеви, доказати да је тај троугао „египацки", тј. да му је однос страница $3 : 4 : 5$.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Двије кружнице се сијеку у тачкама A и B. Кроз тачку K једне кружнице конструисане су праве KA и KB које сијеку другу кружницу у тачкама M и N. Ако је O центар прве кружнице, доказати да су праве MN и OK нормалне.

2. Нека је k цио број. Доказати да постоје природни бројеви x и y такви да је

$$2^x + x - y - \lfloor \log_2 y \rfloor = k$$

ако и само ако је $k \neq 1$.

3. Ако је n природан број, доказати да број $2^n + 1$ није ђељив са 247.

4. Доказати да једначина

$$\overline{DVA} \cdot \overline{PET} = \overline{DESET}$$

нема рјешења ако различитим словима одговарају различите цифре $(D \neq 0,\ P \neq 0)$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да у оштроуглом троуглу вриједи

$$\sin\frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c} < \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,.$$

2. Нека је a позитиван реалан број. Доказати да су сљедеће тврдње еквивалентне:
(i) У правоуглом координатном систему постоји квадрат странице a чија су тјемена тачке са цјелобројним координатама.
(ii) Постоје цијели бројеви m и n исте парности такви да је $m^2+n^2=2a^2$.

3. У једнакостраничном троуглу странице 1 дато је 1996 тачака. Доказати да постоји круг полупречника $\dfrac{1}{24}$ у коме се налази бар 20 од тих тачака.

4. Нека је P полином са цјелобројним коефицијентима. Доказати да су скупови цјелобројних рјешења једначина

$$P(P(P(x))) = x, \quad P(x) = x$$

једнаки.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ вриједи

$$\sin x \,\mathrm{tg} x > x^2.$$

2. Нека је x_1 произвољан реалан број и

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n}\,x_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да је низ (x_n) неограничен и опадајући почев од неког члана.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ЧЕТВРТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Добој, 29.03.1997.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да четири подножја нормала спуштених из подножја једне висине троугла на остале његове висине и странице припадају истој правој.

2. Доказати да за позитивне бројеве a и b вриједи

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{4\sqrt{ab}}\,.$$

3. Одредити све правоугле троуглове код којих су све странице цјелобројне и површина једнака обиму.

4. Нека су тјемена једнакостраничног троугла, 6 тачака које дијеле његове странице на три једнака дијела и тежиште троугла обојени са двије боје. Доказати да постоји једнакостранични троугао чија су сва тјемена исте боје.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Тачке D и E дијеле редом странице AB и CA једнакостраничног троугла ABC у односу $1:2$. Нека је F пресјечна тачка правих BE и CD. Доказати да су праве AF и BE међусобно нормалне.

2. Доказати да у сваком троуглу вриједи

$$(4a+3b)^2 \geq 96P.$$

3. Ријешити једначину

$$\overline{ab} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cdc} = \overline{ababcc} \quad (a \neq 0),$$

ако слова означавају цифре.

4. Правоугаоник формата 8×7 покривен је доминама формата 2×1. Доказати да га можемо подијелити на два правоугаоника разрезавши при томе највише једну домину.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Riјешити у скупу природних бројева једначину

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{z}{1997}\,.$$

2. Ако у троуглу вриједи

$$2R + r = s,$$

доказати да је троугао правоугли.

3. Ако су тјемена троугла цјелобројне тачке у правоуглом координатном систему, доказати да су сви његови углови различити од 60°.

4. Доказати да међу било којих пет тјемена правилног десетоугла постоје четири тјемена која чине једнакокраки трапез.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Датум рођења мале Јаглике написан је у облику $J.\overline{AG}.\overline{LIKA}.$, при чему сваком слову одговара нека цифра. Одредити тај датум ако вриједи

$$\overline{JA} \cdot \overline{GL} \cdot \overline{IAK} = \overline{JAGLIK} \cdot A\,.$$

2. Доказати да за природан број $n > 1$ вриједи

$$n^{2n} < (n+1)^{n+1} \cdot (n-1)^{n-1}.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ПЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Приједор, 28.03.1998.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако за цијеле бројеве a, b, c вриједи

$$a^2 + b = c^2,$$

доказати да је број abc дјељив са 6.

2. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине спуштене из тјемена C правог угла. Ако је $CD \leq 1$, доказати да је

$$\frac{1}{1+AD} + \frac{1}{1+BD} \leq \frac{2}{1+CD}\,.$$

Да ли вриједи обрнуто?

3. Доказати да свака кружница са центром у тачки $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ садржи највише једну цјелобројну тачку.

4. Нека су D, E, F подножја нормала спуштених из центра O уписане кружнице троугла ABC на његове странице BC, CA, AB респективно и нека је AB најмања страница тог троугла. Ако се праве AO и FD сијеку у тачки M, а праве BO и FE у тачки N, доказати да је $MN \parallel AB$.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Наћи све цијеле бројеве x за које је

$$\frac{1}{9}(x + \sqrt{x^2 - 90x + 1998})$$

такође цио број.

2. Нека је ABC правоугли троугао, а D подножје висине спуштене из тјемена C правог угла. У троуглове ACD и BCD уписане су кружнице са центрима у тачкама R и S. Доказати да симетрала правог угла сијече праву RS под правим углом.

3. Ријешити у скупу простих бројева једначину

$$p^2 - qr = 36100.$$

4. Доказати да се правоугаона табла може покрити фигурама облика као на слици 2.2, тако да ниједан правоугаоник димензије 3×2 унутар те табле није покривен са двије овакве фигуре, ако и само ако је та табла димензије

$$6m \times 2n \;\; (m, n \in \mathbb{N},\; n > 1).$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ако у правоуглом троуглу вриједи

$$\frac{12}{a}+\frac{12}{b}=\frac{35}{c},$$

доказати да је он „египатски”, тј. да му је однос страница $3:4:5$.

2. Квадратни полином p је такав да једначина $p(x)=x$ нема реалних рјешења. Доказати да ни једначина $p(p(x))=x$ нема реалних рјешења.

3. Нека су тјемена оштроуглог троугла цјелобројне тачке у равни. Доказати да његова површина није мања од $\dfrac{3}{2}$.

4. Доказати да за сваки природан број n већи од 1 постоји n узастопних природних бројева међу којима се налазе тачно два проста броја.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да за сваки реалан број a једначина

$$43x^3-19ax^2+2a^2x-1=0$$

има бар једно рјешење у интервалу $[0,1]$.

2. За низ позитивних бројева $a_0,a_1,\dots,a_{1998}$ вриједи

$$a_0=1,\ a_{1998}=2 \ \text{ и } \ a_k^2\le a_{k-1}a_{k+1},\quad k\in\{1,2,\dots,1997\}.$$

Доказати да ниједан члан овог низа није већи од 2 и да је $a_{999}\le\sqrt{2}$.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ШЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Модрича, 20.03.1999.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако је
$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$
доказати да је
$$x^3+y^3+z^3=1.$$

2. Нека је O центар описане кружнице и H ортоцентар троугла ABC. Ако је $\sphericalangle ACB=60^\circ$, доказати да је права OH симетрала једног од углова између правих AH и BH.

3. Унутар јединичног квадрата се налази 9 тачака, од којих су сваке 3 неколинеарне. Доказати да 3 од њих образују троугао површине мање од $\dfrac{1}{8}$.

4. Доказати да једначина
$$m^4-n^4=7(m^3+n^3)$$
нема рјешења у скупу природних бројева.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу реалних бројева једначину
$$\sqrt[4]{x}+\sqrt{25-x}=5.$$

2. Нека је O пресјечна тачка дијагонала паралелограма $ABCD$ $(\sphericalangle ABC>90^0)$ и K,L,M подножја нормала спуштених из тачке D редом на праве AB,BC и AC. Доказати да тачка O лежи на кружници описаној око троугла KLM.

3. Нека су m и n природни бројеви већи од 1. Доказати да се правоугаона табла $m\times n$ може покрити фигурама облика као на слици 2.3, ако и само ако је број mn дјељив са 8.

4. Ако за природне бројеве a и b вриједи
$$(a-1)^2+(b+1)^2=6ab+1,$$
доказати да су a, b, $2a-1$ и $2b+1$ потпуни квадрати.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ вриједи

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2 + \sqrt{2}\,.$$

2. Риједшити у скупу цијелих бројева систем:

$$x^2 = 3x + yz,$$

$$y^2 = 3y + zx,$$

$$z^2 = 3z + xy.$$

Доказати да за свако реално рјешење овог система вриједи

$$-4 \leq xyz \leq 0.$$

3. Ако за пермутацију $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ бројева $1, 2, \ldots, n$ вриједи

$$\frac{1 + a_k}{a_{k+1}} < 1 + \frac{2}{k}\,, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

доказати да је она идентична.

(Нека је $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Пермутација* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ је бијекција $\pi : S \to S$, таква да је $\pi(i) = a_i$.)

4. Нека су m, n цијели бројеви за које је

$$\frac{m^3 - n^3 + 1999m}{mn^2}$$

такође цио број. Доказати да је један од бројева $m, 1999m$ потпун куб.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Риједшити у скупу природних бројева једначину

$$x^4 - y^4 = 5(x^3 + y^3).$$

2. Нека је $x_1 \in \mathbb{R}$ и нека је бесконачан низ (x_n) реалних бројева дефинисан рекурентном формулом

$$x_{n+1} = \sqrt{3} - \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Наћи x_{1999}.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

СЕДМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 01.04.2000.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Одредити најмањи природан број n такав да у децималном запису броја $\sqrt{n^2+4}$ прве три цифре послије децималног зареза буду нуле.

2. У поља шаховске табле 8×8 су уписани бројеви од 1 до 64 (редом од доњег лијевог до горњег десног угла). Ако се на таблу постави 8 топова тако да се међусобно не нападају, доказати да је збир бројева на којима се топови налазе увијек исти.

3. Нека су r_1 и r_2 полупречници кружница са центрима на хипотенузи AB правоуглог троугла ABC, при чему прва кружница додирује катету AC и висину троугла повучену из тјемена C, а друга кружница катету BC и исту висину. Доказати да је $r_1 + r_2 = 2r$, гђе је r полупречник кружнице уписане у троугао ABC.

4. Доказати да не постоје цијели бројеви m и n такви да је $m^3 + 3n^2 + 3$ потпун куб.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да не постоји природан број n за који би једначина

$$x^2 + (n+3)x - n = 0,$$

имала рјешење у скупу рационалних бројева.

2. Нека су D и E средишта страница BC и AC троугла ABC и T његово тежиште. Доказати да се око четвороугла $CDTE$ може описати кружница ако и само ако је $a^2 + b^2 = 2c^2$.

3. У оштроугли троугао уписана су три квадрата тако да два тјемена сваког квадрата леже на једној страници троугла, а друга два тјемена леже на друге двије странице. Доказати да квадрат чија страница лежи на најмањој страници троугла има највећу површину.

4. Ријешити у скупу цијелих бројева систем

$$x + y - z = 20,$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} = 10.$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ такве да за све $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вриједи

$$f(mn) = f(m)f(n),$$

$$f(|m-n|) = |f(m) - f(n)|.$$

2. Нека подножје D висине CD троугла ABC припада страници AB тог троугла и нека су r, r_1, r_2 полупречници кружница уписаних у троуглове ABC, ACD, BCD редом. Доказати да је

$$r + r_1 + r_2 = CD$$

ако и само ако је $\gamma = 90^o$.

3. Шаховска табла 8×8 је покривена са 16 Т–тетрамино фигура. Уочимо 14 правих које сијеку ту таблу, паралелне су некој ивици табле и налазе се на цјелобројном растојању од те ивице. Доказати да бар 10 од тих правих сијеку тачно 4 Т–тетрамино фигуре.

(*T–тетрамино* фигура је фигура која има облик слова T и састављена је од 4 јединична квадрата.)

4. Одредити све природне бројеве n за које је $2^n + n^2 + 1$ потпун квадрат.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Низ (x_n) је дефинисан рекурентном формулом

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1 \quad \text{и} \quad x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \;\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Доказати да за свако $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вриједи

$$1 - 2^{-2^n} < x_n < x_{n+1}^2 < 1.$$

2. Одредити за које позитивне m једначина

$$x^3 - 2x^2 + x - m = 0$$

има два коријена који су по модулу мањи од 1.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ОСМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Пале, 07.04.2001.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Конструисати троугао ако су дате пресјечне тачке кружнице описане око тог троугла са продужецима његових висина.

2. Доказати да једначина

$$2x^2 - 11y^2 = 2001$$

нема цјелобројних рјешења.

3. Доказати да у правоуглом троуглу вриједи

$$(1+\sqrt{2})r \leq R.$$

4. Шаховска табла 8×8 је покривена доминама. Неке од њих су постављене хоризонтално, а преостале вертикално. Доказати да и хоризонталних и вертикалних домина има паран број.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да једначина

$$x^3 + 10y^3 = 2001$$

нема цјелобројних рјешења.

2. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{4x-2}\,.$$

3. Око једнакостраничног троугла ABC странице 1 је описана кружница. Нека је M средиште лука AB, коме не припада тачка C, и нека је N тачка на правој CA таква да је A средиште дужи CN. Нека кружница описана око троугла CMN сијече страницу AB у тачки D. Наћи дужину дужи AD.

4. Доказати да се правилни шестоугао странице 1 може покрити са три круга полупречника $\dfrac{3}{4}$, а да се не може покрити са три квадрата странице 1.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека су K, L, M, N редом средишта страница AB, BC, CD, DA конвексног четвороугла $ABCD$. Унутар тог четвороугла одредити тачку P такву да површине четвороуглова $AKPN$, $BLPK$, $CMPL$, $DNPM$ буду једнаке.

2. Нека је p прост број. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{p}\,.$$

3. Квадрат странице 10 је покривен повезаним фигурама састављеним од 4 јединична квадрата (тзв. *тетрис* фигурама). Доказати да међу њима има бар шест подударних.

4. Доказати да у троуглу вриједи

$$\frac{6}{7} \le \frac{1}{3+\cos\alpha} + \frac{1}{3+\cos\beta} + \frac{1}{3+\cos\gamma} < 1.$$

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Исти као задатак 1 за трећи разред.

2. Нека је p прост број. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{p}\,.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Низови (a_n) и (b_n) су дефинисани са

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1, & a_2 = 2, & a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, & (n > 1), \\ b_1 = 1, & b_2 = 4, & b_{n+1} = 7b_n - b_{n-1} - 2, & (n > 1). \end{array}$$

Доказати да је $b_n = a_n^2$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

ДЕВЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 27.04.2002.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако за реалне бројеве x, y, z важи

$$\sqrt{x} - \frac{1}{y} = \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \sqrt{z} - \frac{1}{x}\,,$$

доказати да су они међусобно једнаки.

2. На страници BC једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) дата је тачка D ($D \neq C$) таква да је $AD^2 = BD \cdot BC$. Доказати да је $AD = AB$.

3. Доказати да не постоји природан број n такав да је број $2^n + n^2$ дјељив са 2002.

4. Нека је $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и нека је у правоуглом координатном систему означено, на произвољан начин, 17 тачака из скупа $S \times S$. Доказати да постоје три означене тачке A, B, C такве да је B средиште дужи AC.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да за $a > 0$ и $0 < b < 1$ вриједи

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\,.$$

2. Нека су D, E редом средишта страница AB и AC троугла ABC и M пресјечна тачка симетрале угла BAC са страницом BC. Доказати да вриједи:

(и) Ако је четвороугао $ADME$ тетиван, онда је $AD \cdot AE = MD \cdot ME$.

(ии) Ако је $AD \cdot AE = MD \cdot ME$, тада је четвороугао $ADME$ тетиван или је ромб.

3. Доказати да је број $a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ ирационалан, гђе је

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ако је број простих дјелитеља броја } n \text{ непаран,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Коначно много равни дијеле простор на неколико области. Доказати да се могу одабрати двије области које се налазе са различитих страна сваке од тих равни.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Једнакостранични троугао ABC је уписан у кружницу k. На страницама AC и AB узете су тачке M и N, редом, тако да је $AM = 2MC$ и $AN = NB$. Полуправа MN сијече кружницу k у тачки P. Доказати да је

$$\frac{PA}{PB} - \frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $xyz = x + y + z + 2$. Доказати неједнакост

$$5(x + y + z) + 18 \geq 8(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}).$$

3. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да је укупан број уређених тројки (A, B, C) подскупова скупа S таквих да је

$$A \subseteq B \subseteq C \quad \text{и} \quad |\, B \,| = \frac{|\, A \,| + |\, C \,|}{2}$$

једнак $\dbinom{2n}{n}$. (Са $|\, X \,|$ је означен број елемената скупа X.)

4. За природан број n означимо са $\varphi(n)$ број природних бројева који нису већи од n и који су релативно прости са n. Наћи све природне бројеве n за које $\varphi(n) \mid n$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су D, E редом средишта страница BC и AC троугла ABC и O, S редом центри описане и уписане кружнице. Доказати да тачке D, E, O, S припадају истој кружници ако и само ако је

$$AC + BC = 2AB.$$

2. Нека су x_1, $x_2, \ldots, x_n$ бројеви из интервала $(0, \pi/2)$ такви да је

$$\mathrm{tg} x_1 + \mathrm{tg} x_2 + \cdots + \mathrm{tg} x_n \leq n.$$

Доказати да је

$$\sin x_1 \, \sin x_2 \ldots \sin x_n \leq (\sqrt{2})^{-n}.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

ДЕСЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Србац, 05.04.2003.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је $xy + yz + 2zx \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Означимо са $F(k)$ број цифара у децималном запису природног броја k, које су различите од 1. Низ (a_n) је дефинисан рекурентном формулом

$$a_{n+1} = a_n + F(a_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

при чему је почетни члан a_1 произвољан природан број.
Да ли је низ (a_n) обавезно константан почевши од неког члана?

3. Дата је полукружница са центром O и пречником AB. Нека је M произвољна тачка дужи AO, а C и D тачке на тој полукружници такве да је $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$. Доказати да тачке O, C, D, M леже на једној кружници.

4. У некој скупштини је подијељено 200 посланичких мјеста између 8 политичких странака тако да никојих 5 странака нема двотрећинску већину. Доказати да постоје двије странке које имају једнак број посланика.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x + y + z = 3$. Доказати да је $xy + yz + zx - xyz \leq \dfrac{9}{4}$.

2. Доказати да ако у конвексном четвороуглу вриједе било које двије од сљедећих тврдњи, тада вриједи и трећа тврдња:

(i) четвороугао је тангентни;

(ii) дијагонале четвороугла су нормалне;

(iii) једна од дијагонала четвороугла полови другу дијагоналу.

3. Природан број k називамо *добрим* ако постоји бесконачно много уређених парова (a, b) природних бројева таквих да трином $kx^2 + ax + b$ има цјелобројне коријене и да постоји природан број n такав да су a и b редом сума и производ цифара броја n. Доказати да постоји бесконачно много добрих природних бројева.

4. У фудбалском првенству неке државе учествује 18 екипа. Након 6 одиграних кола све екипе су имале различит број освојених бодова. Одредити колико је било неријешених утакмица.
(У сваком колу се одигра 9 утакмица. Свака екипа за побједу добија 3 бода, за неријешен резултат 1 бод, а за пораз 0 бодова.)

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека су a и b реални бројеви. Доказати да једначина

$$x^4 + ax^3 + 3x^2 + bx + 1 = 0$$

има 4 различита коријена модула 1 ако и само ако је $a = b$ и $2 < |a| < \dfrac{5}{2}$.

2. Дат је трапез $ABCD$ са основицама $AB = 2$ и $CD = 1$, краком $BC = \sqrt{3}$ и углом $\sphericalangle ABC = 70^\circ$. Нека је E тачка унутар тог трапеза таква да је $\sphericalangle ECB = 10^\circ$ и $\sphericalangle EBC = 20^\circ$. Доказати да је троугао AED једнакостраничан.

3. Природан број $n > 1$ је *тотално практичан* ако се сваки природан број који је мањи од n може на јединствен начин представити у облику збира различитих дјелилаца броја n. Доказати да је сваки тотално практичан број степен броја 2.

4. У унутрашњости конвексног n–угла $A_1A_2\ldots A_n$ дата је тачка M, која се не налази ни на једној његовој дијагонали. За $i = 1, 2, \ldots, n$ конструисане су полуправе A_iM. Свака од тих полуправих сијече неку страницу многоугла у њеној унутрашњој тачки. Уочене су све пресјечне тачке полуправих A_iM са страницама многоугла. Нека је e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ број уочених тачака на страници A_iA_{i+1} $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Доказати да је број $1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + \ldots + n \cdot e_n$ дјељив са n.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су a и x_1 реални бројеви и

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot x_n + \frac{a}{2n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Доказати да је низ (x_n) конвергентан и одредити његову граничну вриједност.

2. На свакој од страна тетраедра уочена је по једна тачка, тако да је свака од 6 правих које одређују 2 од 4 уочене тачке паралелна са неком од ивица тетраедра. Доказати да су уочене тачке тежишта страна тетраедра.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

11. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Теслић, 24.04.2004.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да се куб сваког природног броја већег од 1 може представити у облику разлике квадрата двају природних бројева.

2. Нека је T тежиште и S центар уписане кружнице троугла ABC. Доказати да су сљедећа тврђења еквивалентна:

(i) права TS је паралелна некој страници троугла ABC;

(ii) једна од страница троугла ABC је једнака полузбиру двије преостале странице.

3. Углови на основици AB једнакокраког троугла ABC су по $80°$. Права која пролази кроз тјеме B и центар кружнице описане око тог троугла сијече страницу AC у тачки D. Доказати да је $AB = CD$.

4. Скуп $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ је најприје разбијен на m непразних подскупова, а затим на m^2 непразних подскупова. Доказати да су неких m елемената скупа S у првом разбијању били сви у једном скупу, а у другом разбијању сви у различитим скуповима.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}\,.$$

2. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB и углом код тјемена C мањим од $60°$. Нека су O, S редом центри описане и уписане кружнице троугла ABC и D пресјечна тачка кружнице описане око троугла AOS са страницом AC. Доказати да је $SD \parallel BC$ и
$AS \perp OD$.

3. Одредити све парове (a, b) природних бројева такве да су сви коријени једначина

$$x^2 - ax + a + b - 3 = 0,$$
$$x^2 - bx + a + b - 3 = 0,$$

такође природни бројеви.

4. Шаховска табла 8×8 је на произвољан начин покривена доминама 2×1. Доказати да краљ може обићи таблу тако да на сваком пољу буде тачно једанпут и тако да иде домину по домину (тј. кад први пут стане на поље неке домине, краљ одмах прелази на друго поље те домине).

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. (a) Низ (a_n) реалних бројева је дефинисан са

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = p\,, \quad a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} \;\; (n > 1).$$

Доказати да је за $n > 1$ полином $x^n - a_n x + a_{n-1}$ дјељив са $x^2 - px + 1$.

(b) Користећи резултат под (a) ријешити једначину $x^4 - 56x + 15 = 0$.

2. Доказати да за позитивне бројеве x, y, z такве да је $x + y + z = 1$ важи

$$\sqrt{3xyz}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z}\right) \geq 4 + \frac{4xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}\,.$$

3. Шаховска табла 8×8 је на произвољан начин разбијена на домине 2×1. Доказати да је могуће уписати по један природан број у свако поље табле, тако да у свим доминама буде једнак збир и тако да бројеви уписани у сусједна поља (са заједничком ивицом) буду узајамно прости ако и само ако припадају једној домини.

4. Конвексан многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ је дијагоналама које се не сијеку разбијен на неколико троуглова, тако да из сваког тјемена тог n–тоугла полази паран број дијагонала (могуће и ниједна), осим из тјемена A_{i_1}, A_{i_2}, $\ldots$, A_{i_k}, гдје је $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Доказати да је тада k парно и

$$\begin{aligned} n &\equiv i_1 - i_2 + \cdots + i_{k-1} - i_k \pmod 3, \quad \text{za} \quad k > 0,\\ n &\equiv 0 \pmod 3, \quad \text{za} \quad k = 0. \end{aligned}$$

(Овакво разбијање на троуглове назива се *триангулација* многоугла.)

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Исти као задатак 1 за трећи разред.

2. Доказати да за $0 < x < \pi/2$ важи неједнакост $\sin x > \dfrac{4x}{x^2+4}$.

3. Дат је низ (a_n) реалних бројева са коначним скупом вриједности. Ако за свако $k > 1$ подниз (a_{kn}) периодичан, да ли је тада и низ (a_n) обавезно периодичан?

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

12. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 23.04.2005.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је у правоуглом троуглу ABC тачка D подножје висине из тјемена C правог угла и O_1, O_2 центри кружница уписаних у троуглове ACD и BCD редом. Нека кружница са центром C и полупречником CD сијече катете AC и BC редом у тачкама M и N.

(a) Доказати да су тачке O_1, O_2, M, N колинеарне.

(б) Доказати да је $MN > 2\,O_1O_2$.

2. Одредити међусобно различите цифре a, b, c, d ($a \neq 0,\ b \neq 0$) тако да важи

$$\overline{abc} \cdot \overline{bac} = \overline{adabc}.$$

3. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да је

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

4. Нека су m, n природни бројеви већи од 2. У поља правоугаоне табле $m \times n$ је уписан по један број, тако да за свако поље вриједи: *збир бројева у том пољу и њему сусједним пољима једнак је нули.* Доказати да на тој табли постоје два једнака броја.
(Два поља су сусједна ако имају бар једно заједничко тјеме.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је конвексан многоугао $A_1A_2 \ldots A_n$. Нека је B_i пресјечна тачка дијагонала A_iA_{i+2} и $A_{i+1}A_{i+3}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Познато је да су симетрале унутрашњих углова многоугла $A_1A_2 \ldots A_n$ истовремено симетрале страница многоугла $B_1B_2 \ldots B_n$ (симетрала угла $\sphericalangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ је симетрала странице $B_{i-1}B_i$).

(a) Доказати да је многоугао $A_1A_2 \ldots A_n$ тангентан, а многоугао $B_1B_2 \ldots B_n$ тетиван.

(б) Ако је $n = 2005$, доказати да је многоугао $A_1A_2 \ldots A_{2005}$ правилан.

2. Ако средњи по величини међу позитивним бројевима a, b, c није већи од геометријске средине остала два броја, доказати да је

$$abc(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3.$$

3. Наћи све сложене бројеве n за које важи: ако су $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k < d_{k+1} = n$ сви дјелиоци броја n, тада су $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3, \ldots, d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ такође дјелиоци броја n.

4. Свако поље квадратне таблице 30×30 обојено је црном или бијелом бојом, при чему има 450 бијелих и 450 црних поља. У потезу је дозвољено разрезати таблицу на правоугаонике 3×1, па од тих правоугаоника саставити нову таблицу 30×30. Да ли је увијек могуће послије неколико таквих потеза добити таблицу у којој су сва бијела поља на горњој половини, а сва црна поља на доњој половини?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је у троуглу ABC ($AB \neq AC$) симетрала угла $\sphericalangle BAC$ такође симетрала угла између висине AD и тежишнице AE. Одредити угао $\sphericalangle BAC$.

2. Доказати да у оштроуглом троуглу важи

$$\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma} + \sqrt{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha} + \sqrt{\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta} \leq \frac{3\sqrt{6}}{4}\,.$$

3. Наћи све сложене бројеве n за које важи: ако су $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k < d_{k+1} = n$ сви дјелиоци броја n, тада су $d_1 + d_2$ и $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ такође дјелиоци броја n.

4. Доказати да за свако n постоји граф чији су сви циклуси дужине бар $2n + 3$ и чији се чворови могу означити бројевима од 1 до $2n + 1$, тако да се бројеви којима су означена било која два сусједна чвора разликују за 1 по модулу $2n + 1$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Над висином BD троугла ABC, као над пречником, конструисана је кружница која сијече странице AB и BC у тачкама K и L. Тангенте ове кружнице у тачкама K и L се сијеку у тачки M. Доказати да права BM полови дуж AC.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. У затвор је доведено 100 заробљеника. Надзорник им је рекао: „*Даћу вам једно вече да поразговарате међусобно, затим ћу вас распоредити по одвојеним ћелијама па више нећете моћи комуницирати. Понекад ћу неког од вас доводити у просторију у којој се налази лампа (на почетку је лампа искључена). Одлазећи из собе ви можете оставити лампу укључену или искључену, како хоћете.*
Ако ми у неком тренутку неко од вас каже да сте сви ви већ били у соби и ако буде у праву, онда ћу вас наставити доводити у собу све док ми још неко други не каже да сте сви већ били у соби. Ако и он буде у праву, све ћу вас пустити на слободу. Ако било ко погријеши, све ћу вас бацити крокодилима. И немојте се бринути да ћу неког заборавити – ако будете ћутали, сви ћете бити у соби са лампом и никоме ниједна посјета собе неће бити посљедња."
Могу ли заробљеници смислити стратегију која им гарантује избављење?

13. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 29.04.2006.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Природни бројеви a, b и c су такви да су $a+c$ и $b+c$ квадрати узастопних природних бројева. Доказати да су $ab+c$ и $ab+a+b+c$ такође квадрати узастопних природних бројева.

2. У троуглу ABC су углови у тјеменима A, B, C редом 70°, 60° и 50°. Нека су D и E тачке на страницама BC и AC такве да је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE = 20^\circ$. Нека је F пресјечна тачка правих AD и BE и G подножје нормале из E на BC. Доказати да је $FG \parallel AC$.

3. Конструисати троугао ако су му дати положајем тежижте и подножја висине и симетрале угла из тјемена A.

4. На табли је записано 5 природних бројева. У једном кораку се бирају нека два записана броја a и b, таква да је $a < b$ и a не дијели b. Они се бришу и умјесто њих се на таблу записују бројеви НЗД(a, b) и НЗС(a, b). Колико је максимално оваквих корака могуће направити? Навести примјер петорке за коју се тај максималан број може остварити.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека су над страницама троугла ABC, површине P, извана конструисани квадрати ACC_2A_1, BAA_2B_2 и CBB_1C_1. Доказати да се од дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 може конструисати троугао и израчунати му површину.

2. Ако је површина троугла са цјелобројним дужинама страница рационалан број, доказати да је његов обим паран број.

3. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt{x-x^2} - \sqrt{3x-x^2} + \sqrt{1-4x+2x^2} = 1.$$

4. Дата је таблица $2 \times n$, гђе је n паран природан број. Петар на произвољан начин уписује у поља те таблице бројеве $1, 2, \ldots, 2n$ (сваки број по једанпут и у свако поље по један број). Затим Павле такође на произвољан начин разбија дату таблицу на домине 2×1 (међу којима може бити и хоризонталних и вертикалних). Рачуна се производ бројева записаних у пољима сваке домине, па се ти производи саберу и добија се број s. Доказати да Петар увијек може постићи да буде

$$s \leq \frac{n(4n^2+6n+5)}{6}\,.$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. У правоуглом координатном систему у равни дат је цјелобројан троугао чија је површина $1/2$. Доказати да центар његове описане кружнице није цјелобројна тачка.

(*Цјелобројна тачка* је тачка чије су обје координате цијели бројеви. *Цјелобројан троугао* је троугао чија су сва три тјемена цјелобројне тачке.)

2. Нека су r_1, r_2, r_3 и r_4 полупречници четири круга који додирују краке CA и CB троугла ABC, тако да прва два још додирују страну AB изнутра и извана, а трећи и четврти још описани круг троугла ABC изнутра и извана, редом. Доказати да је

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}\,.$$

3. Ако за природне бројеве a, b, c, d важи

$$2(ac + bd) \leq a^2 + b^2 \leq c^2 + d^2,$$

доказати да је

$$|ad - bc| \geq 15.$$

4. На табли је записано n природних бројева. У једном кораку се бирају нека два записана броја a и b, таква да је $a < b$ и a не дијели b. Они се бришу и умјесто њих се на таблу записују бројеви $\mathrm{NZD}(a, b)$ и $\mathrm{NZS}(a, b)$. Колико је максимално оваквих корака могуће направити? Навести примјер n–торке за коју се тај максималан број може остварити.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > n - 1.$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Дат је конвексан петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$. Нека су M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 редом средишта страница A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1. Ако је

$$\frac{A_1M_3}{A_3A_4} = \frac{A_2M_4}{A_4A_5} = \frac{A_3M_5}{A_5A_1} = \frac{A_4M_1}{A_1A_2} = \frac{A_5M_2}{A_2A_3} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}\,,$$

доказати да је петоугао правилан.

14. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Зворник, 21.04.2007.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Одредити све просте бројеве p за које се разломак $\dfrac{p}{14}$ може представити у облику збира реципрочних вриједности два природна броја.

2. Одредити све природне бројеве n за које се све странице и дијагонале конвексног $n-$угла могу обојити са двије боје тако да из сваког његовог тјемена излази једнак број дужи обје те боје.

3. На страницама AD и BC конвексног четвороугла $ABCD$ дате су тачке M и N. Права MN сијече дијагонале AC и BD редом у тачкама P и Q ($P \neq Q$). Ако се описане кружнице троуглова AMP, BNQ, CNP, DMQ сијеку у једној тачки, доказати да је $AM : MD = CN : NB$.

4. Ако за реалне бројеве x, y, z важи $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, доказати да је

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3}{4}\,.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да постоји бесконачно много тројки узастопних природних бројева од којих се сваки може представити у облику збира квадрата два цијела броја.

2. У равни је дат конвексан петоугао чији су сви углови тупи. Доказати да се могу наћи двије његове дијагонале, такве да два круга конструисана над тим дијагоналама као пречницима покривају читав петоугао.

3. На страницама AB и AC троугла ABC дате су произвољне тачке B' и C'. Описани кругови троуглова ABC и $AB'C'$ сијеку се у тачкама A и P. Подножја нормала из тачке P на праве AB и AC су тачке M и N. Доказати да је $MN \parallel HH'$, при чему су H и H' ортоцентри троуглова ABC и $AB'C'$.

4. На почетку су на табли написани полиноми $P_1(x) = x^2 + x - 2$, $P_2(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ и $P_3(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x - 2$. Сваке минуте се бришу нека два полинома $P(x)$ и $Q(x)$ и умјесто њих на таблу се записују полиноми $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$. Да ли је могуће да се послије извјесног времена на табли нађе полином у коме се појављују само парни степени од x?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ријешити систем

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= 3, \\ y^2 - zx &= 4, \\ z^2 - xy &= 5. \end{aligned}$$

2. Конвексан $n-$угао $(n > 5)$ је дијагоналама које се не сијеку разбијен на троуглове. Доказати да постоји дијагонала која од тог $n-$угла одсијеца четвороугао или петоугао.

3. Наћи све парове (p, q) простих бројева такве да $pq \mid p^2 - q^2 + 1$.

4. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ сијеку се у тачки S. Ако је $\angle SAB = 15^\circ$, $\angle SBC = 45^\circ$, $\angle SCD = 45^\circ$, $\angle SDA = 75^\circ$, доказати да је четвороугао $ABCD$ или тетивни или тангентни.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Дијагонале AC и BD тетивног четвороугла $ABCD$ сијеку се у тачки S под правим углом. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови страницу AD.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Доказати да за сваки паран природан број k постоји природан број n такав да остатак при дијељењу полинома $(x+1)^n - 1$ са полиномом $x^k + x^{k-1} + \cdots + x + 1$ има све коефицијенте парне.

15. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бијељина, 12.04.2008.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је D тачка на страници AB једнакостраничног троугла ABC и E, F редом тачке на страницама BC и ACтакве да је $DE \parallel AC$ и $DE \parallel BC$. Нека је P пресјечна тачка правих AE и BF. Доказати да је

(a) $AE = BF = CD$,

(b) Четвороуглови $ADPF$, $BEPD$ и $CFPE$ су тетивни.

2. Наћи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи

$$p^2 + q^2 = r^3 + 2.$$

3. Доказати да за ненегативне бројеве x и y важи

$$(x + y)^2(x^2 + 27y^2) \geq 64x^2y^2.$$

4. У поља шаховске табле 8×8 уписани су бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, 16\}$ тако да је сваки број уписан у тачно четири поља. Доказати да постоје два сусједна поља у која су уписани бројеви чија разлика није мања од 3.
(Два поља су сусједна ако имају заједничку тачку.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Наћи све природне бројеве k за које се скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ може подијелити на k дисјунктних подскупова, тако да су суме елемената у свим подскуповима једнаке.

2. Дат је четвороугао $ABCD$ који је тетиван и тангентан. Уписани круг додирује странице AB, BC, CD, DA редом у тачкама K, L, M, N. Доказати да су средишта страница четвороугла $KLMN$ тјемена тетивног четвороугла.

3. Доказати да за позитивне бројеве a, b и природан број $n > 1$ важи

$$(a^n + b^n)^2 \geq 2(ab)^{n-1}(a^2 + b^2)$$

.

4. Доказати да се у сваки троугао површине 1 може смјестити једнакокраки троугао површине $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је D тачка на страници AB једнакостраничног троугла ABC и E, F редом тачке на страницама BC и AC такве да је $DE \parallel AC$ и $DE \parallel BC$. Нека је P пресјечна тачка правих AE и BF. Доказати да је

$$PC \geq PE + PF \geq 2\,PD.$$

2. Два играча наизмјенично уписују произвољне природне бројеве у слободна поља таблице 8×8. Кад се таблица попуни рачунају се суме бројева по врстама и колонама. Број поена првог играча је број колона са парном сумом, а број поена другог играча је број врста са парном сумом.

(a) Доказати да други играч увијек може играти тако да освоји већи број поена.

(b) Колику највећу разлику поена може гарантовати други играч?

3. Ријешити у скупу реалних бројева систем

$$x + y^2 = z^3,$$

$$y + z^2 = x^3,$$

$$z + x^2 = y^3.$$

4. Ако су m, n p природни бројеви такви да је

$$\frac{m}{n-p} + \frac{n}{p-m} + \frac{p}{n-m} = 2008,$$

доказати да се бар један од разломака $\dfrac{m}{n-p}$, $\dfrac{n}{p-m}$, $\dfrac{p}{n-m}$ може скратити.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека је D тачка на страници AB једнакостраничног троугла ABC и E, F редом тачке на страницама BC и AC такве да је $DE \parallel AC$ и $DE \parallel BC$. Нека је P пресјечна тачка правих AE и BF. Доказати да је

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF).$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је n природан број. Доказати да се скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1}\}$ може подијелити на два дисјунктна подскупа тако да су суме $k-$тих степена елемената оба подскупа једнаке, за $k = 0, 1, \ldots, n$.

16. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 11.04.2009.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека су a, b, c позитивни бројеви. Доказати да из $a^2+b^2=c^2$ слиједи

$$\frac{a^2+(c-b)^2}{b^2+(c-a)^2}=\frac{c-b}{c-a}\,.$$

Да ли важи обрнуто тврђење?

2. Наћи све парове (p,q) простих бројева такве да су бројеви

$$pq+p+q,\ \ pq+p-q,\ \ pq-p+q,\ \ pq-p-q$$

такође прости.

3. Доказати да у конвексном $n-$углу $A_1A_2\ldots A_n$ постоји $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ такво да је $A_iA_{i+3}<3\,A_{i+1}A_{i+2}$, при чему је $A_{n+1}\equiv A_1,\ A_{n+2}\equiv A_2,\ A_{n+3}\equiv A_3$.

4. Једнакостраничан троугао је разбијен на коначно много четвороуглова. Доказати да међу тјеменима тих четвороуглова обавезно постоје три колинеарне тачке.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. (a) Одредити најмањи број a и највећи број b тако да за сваки природан број n важи

$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+a}}<\frac{2n}{2n+1}<\sqrt{\frac{2n}{2n+b}}\,.$$

(b) Доказати да је

$$\frac{7}{41}<\frac{50}{51}\cdot\frac{52}{53}\cdot\frac{54}{55}\cdot\dots\cdot\frac{1680}{1681}<\frac{5}{29}\,.$$

2. Одредити највећи троцифрен прост број p за који једначина

$$(1+x^2+xy)^2+y^2=p$$

има бар једно цјелобројно рјешење.

3. Нека кружница уписана у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама K, L, M и нека је P тачка на тој кружници таква да је MP њен пречник. Доказати да је $\angle APB=90^\circ$ ако и само ако је $AB=3\,CK$.

4. Мање од $\frac{n}{m}$ тјемена датог правилног $n-$угла обојено је црвеном бојом, док су остала тјемена плава. Нека је M произвољан $m-$угао чија су тјемена нека од тјемена датог $n-$угла. Доказати да постоји $m-$угао чија су сва тјемена плава и који је подударан са M.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да је

$$\frac{\cos 13^\circ \sin 43^\circ \cos 73^\circ}{\sin(13^\circ + 43^\circ + 73^\circ)} = \frac{1}{4}\,.$$

2. У равни је дат троугао са цјелобројним координатама тјемена. Које од сљедећих тачака у том троуглу

(a) тежиште;

(b) ортоцентар;

(c) центар описане кружнице;

(d) центар уписане кружнице,

обавезно морају имати рационалне координате?

3. Вишњичица и Трешњичица играју сљедећу игру. На почетку Вишњичица разбија дати једнакостранични троугао на коначно много четвороуглова. Затим, Трешњичица и Вишњичица наизмјенично боје тјемена четвороуглова једном од четири боје, при чему први потез има Трешњичица. Игра је завршена када су обојена сва тјемена. Побједник је Вишњичица ако постоји четвороугао чија су сва тјемена обојена различитим бојама. Иначе, побједник је Трешњичица. Која од играчица има побједничку стратегију?

4. Доказати да не постоје природни бројеви x и y такви да су $x^2 + y^2$ и $x^2 + 4y^2$ потпуни квадрати.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ако су производи косинуса наспрамних углова четвороугла једнаки, доказати да је тај четвороугао трапез.

2. Колико се највише бројева може изабрати из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ тако да не постоје два међу њима, чији збир је дјељив њиховом разликом?

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

17. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Пале, 27.03.2010.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Израчунати
$$||\dots|||2010-1|-2|-3|-\cdots-99|-100|.$$

2. Троугаони бројеви су бројеви облика $\dfrac{k(k+1)}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Доказати да су за свако $n \in \mathbb{N}$ сљедећа тврђења еквивалентна

(i) n се може написати у облику збира два троугаона броја,

(ii) $4n+1$ се може написати у облику збира два квадрата.

3. У троуглу ABC у коме је $\angle BAC = 120^\circ$ симетрале углова у тјеменима A, B, C сијеку странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Доказати да је $\angle EDF = 90^\circ$.

4. Одредити све природне бројеве n, $n \geq 2$, за које се бројеви $1, 2, \dots, 2n$ могу уписати у таблицу $2 \times n$ тако да збирови по врстама и колонама задовољавају једнакости $v_1 = v_2$ и $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Да ли постоје различити природни бројеви m и n такви да је

(a) $m^3 - 201m = n^3 - 201n$,

(b) $m^3 - 2010m = n^3 - 2010n$?

2. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c који испуњавају услов $a+b+c=1$ важи неједнакост
$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab} \leq 2.$$

3. Одредити колико има оштроуглих троуглова са тјеменима у тјеменима задатог правилног $(2n+1)-$угла.

4. Из тачке M ван кружнице k конструисане су тангенте на ту кружницу, које је додирују у тачкама A и B. Нека је N тачка кружнице k таква да је $AM \parallel BN$. Нека је C друга пресјечна тачка праве MN са кружницом k. Доказати да је $CN = 2\,BC$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ријешити једначину

$$\cos 2x = \frac{1}{2} + \cos x - \sqrt{3}\sin x.$$

2. Нека тангенте из тачке M додирују кружницу у тачкама A и B и нека је BC пречник те кружнице. Нека је D подножје висине из A на BC. Доказати да права MC полови дуж AD.

3. Доказати да сваки природан број има садржалац у чијем се декадном запису појављује свих десет цифара.

4. Претпоставимо да природан број n има сљедећу особину:
Бројеви $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ *се могу поредати у низ тако да се за свако* $k = 1, 2, \ldots, n$ *између два појављивања броја* k *налази тачно* k *чланова низа.*
Доказати да је $n^2 + n$ дјељиво са 4.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нака су a, b дати позитивни бројеви. Ријешити у скупу реалних бројева једначину

$$\sqrt{a(b+x)} - \sqrt{b(a-x)} = x\sqrt{2}.$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Одредити најмањи природан број k за који се број 1996^{1996} може представити у облику суме k потпуних петих степена $a_1^5 + a_2^5 + \ldots a_k^5$, гдје су a_1, $a_2, \ldots,$ a_k природни бројеви.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

18. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 2.04.2011.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Постоје ли природни бројеви m и n такви да је

$$m^2 + mn + n^2 + m + n = 2011?$$

2. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом BC, при чему је $BC < AC$, и његова описана кружница k_1. Кружница k_2 изнутра додирује кружницу k_1 у тачки R те дира краке AC и AB у тачкама P и Q. Доказати да је средиште M дужи PQ уједно и центар уписане кружнице троугла ABC.

3. Нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати неједнакост

$$\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}\,.$$

4. На кружници се налази n плавих и n црвених тачака које дијеле ту кружницу на $2n$ подударних лукова. Свака црвена тачка је средиште неког лука кружнице са плавим крајевима. Доказати да је и свака плава тачка средиште неког лука кружнице са црвеним крајевима.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дата су кружница k са пречником AB и произвољна тачка M на тој кружници. Нека је MH нормала на пречник AB и нека су C и D пресјечне тачке кружнице k са кружницом k_1 чији је центар у тачки M и полупречником MH. Доказати да права CD полови дуж MH.

2. (a) Ако је $x + y = z$ доказати идентитет

$$x\sqrt{y^2 - yz + z^2} + y\sqrt{z^2 - zx + x^2} = z\sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

(b) Доказати да за позитивне бројеве x, y, z важи неједнакост

$$x\sqrt{y^2 - yz + z^2} + y\sqrt{z^2 - zx + x^2} \geq z\sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

3. Доказати да се за свако $n \in \mathbb{N}_0$ број 2011^{2^n} може представити у облику збира квадрата три природна броја.

4. Да ли је могуће са тринаест правих, од којих ниједна не пролази кроз центар неког поља, издијелити шаховску таблу на дијелове тако да сваки такав дио садржи центар највише једног поља?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ако у троуглу ABC важи

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \sqrt{3},$$

доказати да је један од углова тог троугла једнак $60°$.

2. Ивице OA, OB, OC тетраедра $OABC$ образују правоугли триедар. Нека су P_1, P_2, P_3, P редом површине троуглова OAB, OAC, OBC, ABC и h висина тетраедра из тјемена O на страну ABC. Доказати да је

а) $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P^2$,

б) $h^2 \leq \frac{2P}{3\sqrt{3}}$.

3. Доказати да једначина $x^2 - 7xy + y^2 + 11 = 0$ има бесконачно много цјелобројних рјешења.

4. Скуп природних бројева је подијељен на два скупа Aи B. Доказати да постоје природни бројеви x и y већи од 2011 такви да x, y и xy леже у једном од тих скупова.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Написани су бројеви $2, 3, \ldots, 2011$ и сви могући њихови производи по два броја, по три броја, итд. све до производа свих 2010 бројева. Доказати да је збир реципрочних вриједности свих написаних бројева једнак 1005.

2. Дат је троугао ABC у коме је $\angle ACB = 60°$ и D, E тачке у којима уписана кружница додирује странице BC и AC, редом. Доказати да је

$$\frac{ab}{c} \leq 2\,DE \leq c.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

19. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 28.04.2012.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Доказати да за реалне бројеве x и y важи неједнакост

$$(x^2+y^2)^5 \geq (2xy)^5 + (x^5-y^5)^2.$$

2. За које природне бројеве n се разломак $\dfrac{n^3-2n^2+3n+1}{5n+2}$ може скратити?

3. У троуглу ABC су конструисане симетрале AD и BE углова $\angle BAC$ и $\angle ABC$. Ако је DE симетрала угла $\angle ADC$, наћи угао $\angle BAC$.

4. Дати су различити позитивни реални бројеви x_1, x_2, x_3,$\ldots$, x_{2012}. Доказати да међу њима постоје два, x_i и x_j, тако да вриједи

$$0 < \frac{x_j - x_i}{(1+x_j)(1+x_i)} < \frac{1}{2011}.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дата је колекција тегова са сљедећим својствима:

1° Постоји бар пет тегова међусобно различитих маса,

2° За било која два тега постоје друга два тега са истим збиром маса.

Који најмањи број тегова може бити у тој колекцији?

2. Ријешити једначину $p^3+q^3-r^3=36r^2$ у простим бројевима p, q, r.

3. Дат је $\triangle ABC$ тако да је $\angle BAC = 120^\circ$. Нека симетрала угла $\angle BAC$ сијече страницу BC у тачки D. Доказати да важи

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

4. Нека реални бројеви a, b и c задовољавају сљедеће услове

$$a+2b+3c=1, \quad a \geq -\frac{1}{5},\ b \geq -\frac{1}{2},\ c \geq -1.$$

Одредити највећу вриједност израза $\sqrt{5a+1}+\sqrt{4b+2}+\sqrt{3c+3}$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Дата је једначина $p^3 + q^3 - r^3 = 49(p + q - r)$.

а) Доказати да она има бесконачно много рјешења у простим бројевима p, q, r.

б) Одредити све тројке (p, q, r) међусобно различитих простих бројева који задовољавају дату једначину.

2. Доказати да за реалне бројеве x, y и природан број n важи неједнакост

$$(x^2 + y^2)^n \geq (2xy)^n + (x^n - y^n)^2.$$

3. Тјемена правилног десетоугла су спојена затвореном изломљеном линијом која има 10 дужи. Доказати да су међу тим дужима бар двије паралелне.

4. У конвексном четвероуглу $ABCD$ је

$$\angle ABD = 12^\circ,\ \angle ACD = 24^\circ,\ \angle DBC = 36^\circ,\ \angle BCA = 48^\circ.$$

Одредити $\angle ADC$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Одредити све природне бројеве n за које је $8^n - 3^{n+2} + 25$ потпун куб.

2. Низ (x_n) је дефинисан са

$$x_0 = \frac{15}{4}\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^2 + x_n + 1\right),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказати да је он неограничен.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

20. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 06.04.2013.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Конструисати троугао ако је задато тјеме C, центар описане кружнице O и центар уписане кружнице S.

2. На табли су написана три позитивна броја x, y и 1. Дозвољено је дописивати на таблу збир или разлику нека два већ написана броја, или написати број који је реципрочан неком већ написаном броју. Да ли је увијек могуће добити на табли број

a) x^2,

b) xy.

3. Одредити све просте бројеве p за које важи $43 \mid 7^p - 6^p - 1$.

4. Одредити највећи природан број n за који постоје различити реални бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такви да је

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = \cdots = x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ са основицама $AB = 5, CD = 4$ и крацима $BC = AD = 4$. На краћем луку $\overset{\frown}{CD}$ описане кружнице задата је тачка M. Показати да вриједност $\dfrac{MC + MD}{MA + MB}$ не зависи од положаја тачке M те одредити ту вриједност.

2. Нека су a, b, c цијели бројеви, различити од нуле, за које важи $a + b + c = 0$. Доказати да $a^4 + b^4 + c^4 \mid a^7 + b^7 + c^7$.

3. На кружници су распоређени црвени и плави бројеви. Сваки црвени број је једнак збиру својих сусједа, а сваки плави број је једнак полузбиру сусједа. Доказати да је збир свих црвених бројева једнак нули.

4. Доказати да се број 15^5 не може представити у облику збира четвртих степена петнаест различитих природних бројева.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је у троуглу ABC: $\sphericalangle A = 120^\circ$, O центар описане кружнице и H ортоцентар. Доказати да је $OH = AB + AC$.

2. Дати су позитивни реални бројеви a, b, c за које важи $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Доказати да је

$$\frac{1}{2a + bc} + \frac{1}{2b + ca} + \frac{1}{2c + ab} \geq 1.$$

3. Нека је n природан број већи од 1. Доказати да се број 9^n може представити у облику збира квадрата три различита природна броја.

4. У таблицу 10×10 записани су бројеви 1 до 100; у првој врсти од 1 до 10 слијева надесно, у другој врсти од 11 до 20 слијева надесно итд. Андреј разрезује таблицу на правоугаонике 1×2, затим налази производ бројева у сваком правоугаонику и сабира тих 50 производа. Како треба да разреже квадрат да би добијени збир био најмањи?

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека су a, b, c реални бројеви већи од $\sqrt{2} - 1$ за које важи $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доказати да је

$$\frac{a}{b^2 + 2c - 1} + \frac{b}{c^2 + 2a - 1} + \frac{c}{a^2 + 2b - 1} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине 1 чије се дијагонале сијеку у тачки M под углом α. Нека су O_1, O_2, O_3, O_4 редом центри описаних кружница троуглова ABM, BCM, CDM, DAM. Одредити површину четвороугла $O_1O_2O_3O_4$.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

21. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Источно Сарајево, 29. март 2014.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Бројеви $1, 2, 3, \ldots, 10$ су разбијени на двије групе тако да је производ бројева у првој групи дјељив са производом бројева у другој групи. Коју најмању вриједност може имати количник дијељења првог производа са другим?

2. Нека су D и E тачке на страници троугла ABC такве да је $AB = AD$ и $BE = EC$ (E је између A и C). Нека је F средиште лука BC кружнице описане око троугла ABC. Доказати да тачке B, E, D, F припадају истој кружници.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $ab + bc + ca = a + b + c$. Доказати да је $a + b + c \geq 3$.

4. Из таблице димензије 2014×2014 изрезана су четири угаона поља. Да ли се преостали дио таблице може покрити правоугаоницима 3×1?

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Наћи све цијеле бројеве a за које једначина $x^2 - ax + 5a = 0$ има бар једно цјелобројно рјешење.

2. У паралелограму $ABCD$ тачка M је средиште странице BC, а N произвољна тачка странице AD. Нека је P пресјечна тачка дужи MN и AC, а Q пресјечна тачка дужи AM и BN. Доказати да троуглови BDQ и DMP имају једнаке површине.

3. Дато је 11 различитих природних бројева таквих да је збир било којих 7 бројева већи од збира преостала 4 броја. Колики је најмањи могући збир тих 11 бројева?

4. Наћи све просте бројеве p такве да број $p^2 + 23$ има тачно 10 природних дјелилаца.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Одредити цјелобројна рјашења система једначина

$$x^2 + yz = 120, \quad y^2 + xz = 121.$$

2. Дат је троугао ABC у коме је $\sphericalangle BAC = 40^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Нека су D и E редом тачке на страницама AC и AB такве да је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCE = 30^\circ$ и нека је F пресјечна тачка правих CB и DE. Доказати да је $AB = BF$.

3. Нека је

$$S_{2n} = 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \cdots + (1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2).$$

Доказати да је S_{2n} потпун квадрат ако и само ако су $\dfrac{n}{3}$ и $n+1$ потпуни квадрати.

4. У некој групи од 20 људи сваки од њих познаје бар 10 преосталих. Доказати да између њих можемо изабрати двије тројке такве да било који члан једне тројке познаје сва три члана друге тројке.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c, d важи неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

2. Нека је дат оштроугли троугао ABC са најмањом страницом AB и центром I уписане кружнице. Нека кружница са центром I и полупречником IC сијече страницу AB у тачкама P и Q, гдје је тачка P ближа тачки B него тачки A. Нека приписана кружница наспрам тјемена A додирује страницу BC у тачки E и нека је тачка F симетрична тачки C у односу на тачку E. Доказати да је $FP \perp CQ$.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

22. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 4. април 2015.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Да ли се бројеви $1, 2, 3, \ldots, 10$ могу распоредити у неком редослиједу у низ тако да се сваки од њих, почев од другог, разликује од претходног броја за цио број процената претходног броја?

2. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $x^2+y^2+z^2=3$. Доказати да важи

$$x^4+y^4+z^4+2x+2y+2z \geq 9.$$

3. Дат је скуп $S=\{1,2,3,\ldots,3n\}$, $n \in \mathbb{N}$ и било који његов подскуп T који има бар $n+1$ елемената. Доказати да постоје елементи a, $b \in T$ такви да је бар један од бројева $ab+1$ или $4ab+1$ потпун квадрат.

4. Нека је O центар кружнице описане око оштроуглог троугла ABC и нека је AH ($H \in BC$) висина тог троугла. Нека су M, N, P и Q редом средишта дужи AB, AC, BH и CH и нека су k_1 и k_2 кружнице описане око троуглова AMN и POQ редом. Доказати да једна од пресјечних тачака кружница k_1 и k_2 припада висини AH.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. На шаховском првенству учествује $4n$ шахиста и сваки од њих одигра са сваким од преосталих $4n-1$ играча двије партије, једну са бијелим и једну са црним фигурама. Доказати да на крају турнира збир освојених поена било којих n учесника не може бити већи од збира поена преосталих $3n$ учесника.

(У шаховској партији играч за побједу добија 1 поен, за реми 1/2 поена и за пораз 0 поена.)

2. Нека је K пресјечна тачка дијагонала AC и BD тетивног четвороугла $ABCD$. Ако је $AK=BC$ и $\angle CAB = \angle CAD$, доказати да тачка K дијели дуж AC по златном пресјеку.

3. Наћи све парове (p,q) простих бројева за које важи $5p+q=(p-q)^3$.

4. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$xy(x^2+y^2)=(x+2)(y+2)(x+y-2).$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. У правоуглом троуглу ABC центар S уписане кружнице дијели симетралу CE правог угла у односу $CS : SE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Одредити оштре углове тог троугла.

2. Нека су x, y, z позитивни бројеви такви да је $x^2+y^2+z^2 = 3$. Доказати да важи

$$x^4 + y^4 + z^4 + x + y + z \geq 6.$$

3. Ријешити у скупу природних бројева једначину

$$ab^2 - a^2 - ab - b^2 + 2a - 2b = 0.$$

4. У правилном $25-$углу конструисане су све дијагонале. Доказати да не постоји 9 дијагонала које пролазе кроз исту унутрашњу тачку тог $25-$угла.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека је K пресјечна тачка дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$. Ако је $AK = BC$, $AC : AK = AK : KC$ и $\angle CAB = \angle CAD$, доказати да је четвороугао $ABCD$ тетивни.

2. Низ (x_n) је дефинисан са $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Доказати да за $n \geq 2$ важи

$$n + \frac{1}{4} \leq x_n^2 \leq n + \frac{1}{4} + \frac{\ln(n-1)}{4}\,.$$

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Исти као задатак 4 за трећи разред.

23. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ученика средњих школа Републике Српске

Бања Лука, 9. април 2016.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Студент је за 5 година студија положио 31 испит, при чему је сваке године (почев од друге) положио више испита него претходне године. У петој години он је положио три пута више испита него у првој години. Колико је испита он положио у четвртој години студија?

2. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $ab+bc+ca=1$. Доказати да је

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

3. Нека је ABC оштроугли троугао ($AC<BC$) са полупречником описане кружнице R. Нека је D подножне висине из тачке A на BC. Означимо са T тачку на правој AD, такву да је $AT=2R$, при чему је тачка D између тачака A и T, а са S средиште лука BC кружнице описане око троугла ABC, који не садржи тачку A. Доказати да је $\angle AST=90°$.

4. Да ли постоји пермутација $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ бројева $1,2,3,\ldots,n$ тако да за свако $k=2,3,\ldots,n$ важи $k \mid a_{k-1}+a_k$, ако је

(a) $n=10$,

(b) $n=11$?

(*Пермутација* бројева $1,2,3,\ldots,n$ је бијекција $\pi:\{1,2,3,\ldots,n\}\to\{1,2,3,\ldots,n\}$ за коју је $\pi(i)=a_i$, за свако $i=1,2,\ldots,n$.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом у тјемену C. Нека је BK симетрала унутрашњег угла у тјемену B ($K\in AC$). Круг описан око троугла AKB сијече страницу BC у тачки L. Доказати да је $CB+CL=AB$.

2. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x+y+z=1$. Доказати да важи неједнакост

$$x^3+y^3+z^3+2(xy+yz+zx)\geq \frac{3}{4}\,.$$

Када у овој неједнакости важи знак једнакости?

3. У таблицу димензија 7×7 уписани су реални бројеви, тако да је производ бројева у било ком квадрату димензија 3×3, једнак производу бројева у било ком квадрату 4×4. Да ли је могуће да производ свих бројева у таблици буде једнак 2016?

4. Ако су m и n природни бројеви за које важи $7m^2 + 7m + 2 = n^2$, доказати да је број $n + 1$ једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x^2) + f(xy) = f(f(x + y)).$$

2. За округлим столом сједи 2016 људи, од којих је сваки или *истинољубив*, ако увијек говори истину, или *лажов*, ако увијек лаже. Сваком од њих је дата по једна картица на којој је написан један природан број. Бројеви написани на картицама су различити. Након што су погледали своје бројеве и бројеве својих сусједа (по једног са лијеве и десне стране), сваки од ових људи је рекао: ,,*Мој број је већи од оба броја мојих сусједа*". Послије тога k људи је рекло: ,,*Мој број је мањи од оба броја мојих сусједа*". Наћи највећу могућу вриједност броја k.

3. Ако су m и n природни бројеви за које важи $7m^2 + 7m + 8 = n^2$, доказати да је број $\dfrac{n}{5} + 1$ једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

4. Нека је H ортоцентар оштоуглог троугла ABC. Права која садржи тачку A и нормална је на AC и права која садржи тачку B и нормална је на BC, сијеку се у тачки D. Круг са центром у тачки C, који садржи тачку H, сијече круг описан око троугла ABC у тачкама E и F. Доказати да је $DE = DF = AB$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x + y)f(y) = f(x + xf(y)).$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је ABC оштроугли троугао, AD симетрала угла $\angle BAC$ ($D \in BC$), и E и F ортогоналне пројекције тачке D на AB и AC, редом. Нека је $CE \cap BF = \{K\}$ и нека BF сијече круг описан око троугла AEK у тачки L ($L \neq K$). Доказати да је $BF \perp DL$.