16. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Бања Лука, 11.04.2009.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека су a, b, c позитивни бројеви. Доказати да из $a^2 + b^2 = c^2$ слиједи
$$\frac{a^2 + (c-b)^2}{b^2 + (c-a)^2} = \frac{c-b}{c-a}\,.$$
Да ли важи обрнуто твђење?

2. Наћи све парове (p, q) простих бројева, такве да су бројеви
$$pq + p + q,\ pq + p - q,\ pq - p + q,\ pq - p - q$$
такође прости.

3. Доказати да у конвексном n–углу $A_1A_2 \ldots A_n$ постоји $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такво да је $A_iA_{i+3} < 3\,A_{i+1}A_{i+2}$, при чему је $A_{n+1} \equiv A_1,\ A_{n+2} \equiv A_2,\ A_{n+3} \equiv A_3$.

4. Једнакостраничан троугао је разбијен на коначно много четвороуглова. Доказати да међу тјеменима четвороуглова обавезно постоје три колинеарне тачке.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. (a) Одредити најмањи број a и највећи број b, тако да за сваки природан број n важи
$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+a}} < \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{2n}{2n+b}}.$$

(б) Доказати да је

$$\frac{7}{41} < \frac{50}{51} \cdot \frac{52}{53} \cdot \frac{54}{55} \cdot \ldots \cdot \frac{1680}{1681} < \frac{5}{29}\,.$$

2. Одредити највећи троцифрен прост број p за који једначина

$$(1 + x^2 + xy)^2 + y^2 = p$$

има бар једно цјелобројно рјешење.

3. Нека кружница уписана у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама K, L, M и нека је P тачка на тој кружници таква да је MP њен пречник. Доказати да је $\angle APB = 90^\circ$ ако и само ако је $AB = 3\,CK$.

4. Мање од $\frac{n}{m}$ тјемена датог правилног n-тоугла обојено је црвеном бојом, док су остала тјемена плава. Нека је M произвољан m-тоугао чија су тјемена нека од тјемена датог n-тоугла. Доказати да постоји m-тоугао чија су сва тјемена плава и који је подударан са M .

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Доказати да је

$$\frac{\cos 13^\circ \sin 43^\circ \cos 73^\circ}{\sin(13^\circ + 43^\circ + 73^\circ)} = \frac{1}{4}\,.$$

2. У равни је дат троугао са цјелобројним координатама тјемена. Које од сљедећих тачака у том троуглу:

   (а) тежиште,

   (б) ортоцентар,

   (в) центар описане кружнице,

   (г) центар уписане кружнице

   обавезно морају имати рационалне координате?

3. Вишњичица и Трешњичица играју сљедећу игру. На почетку Вишњичица разбија дати једнакостранични троугао на коначно много четвороуглова. Затим, Трешњичица и Вишњичица наизмјенично боје тјемена четвороуглова једном од 4 боје, при чему први потез има Трешњичица. Игра је завршена када су обојена

сва тјемена. Побједник је Вишњичица ако постоји четвороугао чија су сва 4 тјемена обојена различитим бојама. Иначе, побједник је Трешњичица. Која од играчица има побједничку стратегију?

4. Доказати да не постоје природни бројеви x и y такви да су x^2+y^2 и x^2+4y^2 потпуни квадрати.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Ако су производи косинуса наспрамних углова четвороугла једнаки, доказати да је тај четвороугао трапез.

2. Колико се највише бројева може изабрати из скупа $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, тако да не постоје два међу њима, чији збир је дјељив њиховом разликом?

3. Вишњичица и Трешњичица играју сљедећу игру. На почетку Вишњичица разбија дати једнакостранични троугао на коначно много четвороуглова. Затим, Трешњичица и Вишњичица наизмјенично боје тјемена четвороуглова једном од 4 боје, при чему први потез има Трешњичица. Игра је завршена када су обојена сва тјемена. Побједник је Вишњичица ако постоји четвороугао чија су сва 4 тјемена обојена различитим бојама. Иначе, побједник је Трешњичица. Која од играчица има побједничку стратегију?

4. Доказати да не постоје природни бројеви x и y такви да су x^2+y^2 и x^2+4y^2 потпуни квадрати.

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. Ако је $a^2+b^2=c^2$, тада је
$$\frac{a^2+(c-b)^2}{b^2+(c-a)^2}=\frac{c^2-b^2+(c-b)^2}{c^2-a^2+(c-a)^2}=\frac{(c-b)(c-b+c+b)}{(c-a)(c-a+c+a)}=\frac{c-b}{c-a}.$$
Обрнуто не важи. Један контрапримјер је $a=b=1$, $c=2$.

2. Разликујемо два случаја.

   1° Ни p ни q није дјељиво са 3. Ако је пар остатака које p и q дају при дијељењу са 3 једнак $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$ или $(2,2)$, онда је $pq+p+q$, $pq+p-q$, $pq-p+q$ или $pq-p-q$ дјељиво са 3, редом. Како су посљедња четири броја проста, то је један од њих једнак 3. Из $pq\geq 2q$ слиједи $pq+p-q\geq p+q>3$, те једино $pq-p-q$ може бити једнако 3, што значи да је $(p-1)(q-1)=4$, те је $p=2$, $q=5$ или $p=5, q=2$, јер смо претпоставили да ни p ни q нису дјељиви са 3.

   2° Један од бројева p и q је дјељив са 3. Можемо претпоставити да је $q=3$. Сада имамо да су бројеви $2p-3$, $2p+3$, $4p-3$, $4p+3$ прости. Посматрајмо остатак који p даје при дијељењу са 5. Ако је он једнак $1,2,3$ или 4, онда је $2p+3$, $4p-3$, $4p+3$ или $2p-3$ дјељиво са 5, тј. једнако 5. То нам даје да је $p=1$, $p=2$, $p=\frac{1}{2}$, $p=4$. Непосредном провјером добијамо да $p=2$ није рјешење. Остала је још могућност да је $p=5$, која нам даје још једно рјешење.

   Дакле, тражени парови су $(2,5)$, $(5,2)$, $(3,5)$, $(5,3)$.

3. Нека је $A_iA_{i+1}=a_i$, $A_{i-i}A_{i+2}=d_i$. Претпоставимо супротно, да је $d_i\geq 3a_i$, за свако $i=\overline{1,n}$. Слиједи да је $d_1+d_2+\ldots+d_n\geq 3(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. С друге стране, сабирањем неједнакости $a_1+a_2+a_3>d_2$, $a_3+a_3+a_4>d_3,\ldots,a_{n-1}+a_n+a_1>d_n$, $a_n+a_1+a_2>d_1$ добијамо да је $3(a_1+a_2+\ldots+a_n)>d_1+d_2+\ldots+d_n$, што нам даје контрадикцију.

4. Претпоставимо супротно, тј. да не постоје три колинеарне тачке. Тада је свака унутрашња дуж (дуж чији бар један крај није на контури троугла) страница за тачно 2 четвороугла, док је свака од страница једнакостраничног троугла страница за тачно један четвороугао. Ако је k број унутрашњих дужи и n број четвороуглова, добијамо да је $2k+3=4n$, што нам даје контрадикцију.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Лијева неједнакост се након квадрирања, множења са $(2n+a)(2n+1)^2$ и сређивања своди на њој еквивалентну неједнакост

$$4(a-1)n^2 + 2n + 1 \geq 0,$$

па је $a = 1$ најмањи такав a. Аналогно је десна неједнакост еквивалентна са $2(b-2)n < 1$, па је $b = 2$ највећи такав број.

Множењем неједнакости

$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} < \frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \quad n = 25, 26, \ldots, 840$$

добијамо (б).

2. Користимо идентитет

$$(x^2+1)(s^2+1) = (s-x)^2 + (sx+1)^2.$$

Узимајући $s = x + y$ добијамо да је

$$(x^2+1)((x+y)^2+1) = p,$$

те мора бити $x = 0$ или $x + y = 0$. Одавде слиједи да је p облика $n^2 + 1$.

За $n = 30$ и $n = 28$ број $n^2 + 1$ није прост, па је $p = 677$ тражени прост број.

3. Користићемо стандардне ознаке за елементе троугла. Услов $\angle APB = 90^\circ$ је еквивалентан са сличношћу троуглова APM и PBM, што је даље еквивалентно са

$$\frac{AM}{MP} = \frac{MP}{BM}\,,$$

односно са

$$\frac{s-a}{2r} = \frac{2r}{s-b}\,.$$

Како је

$$r = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\,,$$

посљедња једнакост је еквивалентна са

$$4(s-c) = s\,.$$

С друге стране, једнакост $AB = 3CK$, односно $c = 3(s-c)$, очигледно је еквивалентна такође са $4(s-c) = s\,$.

4. Претпоставимо супротно, тј. да сваки m-угао подударан са M има бар једно црвено тјеме. Посматрајмо многоуглове $M_1, M_2, \ldots, M_n$, при чему се M_k добија ротацијом многоугла M за угао $\frac{2k\pi}{n}$ за $k = 1, \ldots, n$. По претпоставци сваки од тих многоуглова има бар једно црвено тјеме. Такође, свако црвено тјеме је тјеме за тачно m од многоуглова $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (једанпут прво тјеме, једанпут друго, ..., једнанпут m-то). За сваки многоугао M_k (за $k = 1, \ldots, n$) изаберимо по једно његово црвено тјеме A_k. У низу $A_1, A_2, \ldots, A_n$ свака црвена тачка се појављује највише m пута. Како црвених тачака има мање од n/m, то је контрадикција.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Дата једнакост је еквивалентна са сљедећим.

$$\begin{aligned} 4\cos 13^\circ \sin 43^\circ \cos 73^\circ &= \sin 129^\circ, \\ 2\cos 13^\circ(\sin(43^\circ + 73^\circ) - \sin(73^\circ - 43^\circ)) &= \sin 51^\circ, \\ 2\cos 13^\circ \sin 116^\circ - \cos 13^\circ &= \cos 39^\circ, \\ \sin 129^\circ + \sin 103^\circ &= \cos 39^\circ + \cos 13^\circ. \end{aligned}$$

Посљедња једнакост очигледно важи.

2. Нека су $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ три неколинеарне цјелобројне тачке. Тада су координате тежишта троугла ABC

$$x_T = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \in \mathbb{Q}\,, \; y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \in \mathbb{Q}\,.$$

Коефицијент правца праве BC је

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B},$$

те је једначина висине из тјемена A

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = -\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}.$$

Према томе, координате ортоцентра представљају рјешење система једначина

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = -\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}, \quad \frac{y - y_B}{x - x_B} = -\frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}.$$

Тако је

$$x_H = \frac{d_{AB}d_{BC}d_{CA} - x_Ax_Bd_{AB} - x_Bx_Cd_{BC} - x_Cx_Ad_{CA}}{x_Ad_{BC} + x_Bd_{CA} + x_Cd_{AB}},$$

гдје је $d_{ij} = y_i - y_j$. Аналогно се добија и y_H. Очигледно су x_H и y_H рационални бројеви.

Познато је да су O, T, H колинеарне тачке и да је

$$\frac{TH}{OT} = 2,$$

те како T и H имају рационалне координате, лако се добија да и O има рационалне координате.

Конкретно,

$$x_O = \frac{x_A^2d_{BC} + x_B^2d_{CA} + x_C^2d_{AB} - d_{AB}d_{BC}d_{CA}}{2(x_Ad_{BC} + x_Bd_{CA} + x_Cd_{AB})},$$

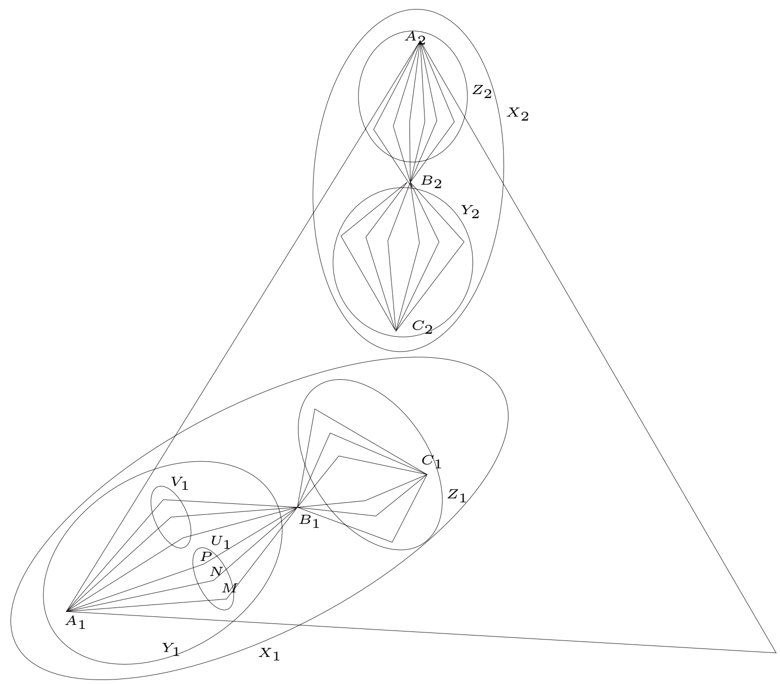
а сличан је и израз за y_O.

Центар уписане кружнице не мора имати рационалне координате. Примјер је троугао са тјеменима $A(1,0)$, $B(-1,0)$, $C(0,1)$, јер је његов центар уписане кружнице $I(0, \sqrt{2} - 1)$.

3. Вишњичица (Ви) има побједничку стратегију. Нека она разбије троугао на четвороуглове као на слици (из практичних разлога, на слици није приказано читаво разбијање, али јасно је да се започето разбијање може наставити: остатак троугла је неконвексан многоугао, па се он може разбити на троуглове, а сваки троугао се једноставно разбија нпр. на три четвороугла). Послије првог потеза Трешњичице (Тр) бар један од скупова X_1 и X_2 остаје нетакнут (у смислу да ниједно тјеме из тог скупа није обојено). Не умањујући општост, нека је то скуп X_1. Тада Ви у свом првом потезу боји тачку B_1 бојом 1. Послије другог потеза Тр бар један од скупова Y_1, Z_1 остаје нетакнут, нпр. скуп Y_1. Сада Ви у другом потезу боји тачку A_1 бојом 2. Послије трећег потеза Тр бар један од скупова U_1, V_1 је остао нетакнут, нпр. U_1. У свом трећем потезу Ви боји тачку N бојом 3. Већ у сљедећем потезу Ви постиже да бар један четвороугао буде онакав какав жели, тако што обоји бојом 4 ону од тачака M или P која претходно није обојена.

4. Претпоставимо да постоје такви бројеви x и y. Одаберимо пар (x, y) код кога је $x + y$ минимално. Лако се види да су тада x и y узајамно прости и да је x непаран. На основу познатог тврђења добијамо да постоје природни бројеви m, n, p, q такви да је $(m, n) = 1$, $(p, q) = 1$ и

$$x = m^2 - n^2 = p^2 - q^2\,,$$



$$y = 2mn = pq\,.$$

Тачно један од бројева p и q је паран. Ми ћемо размотрити случај $p = 2p_1$, док се случај $q = 2q_1$ ради на исти начин. Сад имамо да је

$$mn = p_1 q$$

и на основу теореме о четири броја закључујемо да постоје природни бројеви u, v, α, β такви да је $m = u\alpha$, $n = v\beta$, $p = v\alpha$, $q = u\beta$, при чему су u и v узајамно прости, као и α и β. Тада је

$$u^2\alpha^2 - v^2\beta^2 = 4v^2\alpha^2 - u^2\beta^2\,,$$

односно

$$u^2(\alpha^2 + \beta^2) = v^2(\beta^2 + 4\alpha^2)\,.$$

Није тешко примијетити да је $(\alpha^2 + \beta^2, \beta^2 + 4\alpha^2) = 1$, па добијамо да је

$$\alpha^2 + \beta^2 = v^2\,,$$
$$\beta^2 + 4\alpha^2 = u^2\,,$$

па пар (α, β) такође задовољава жељени услов. Како је при том

$$\alpha + \beta < 2uv\alpha\beta = y < x + y\,,$$

имамо контрадикцију.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Дати услов у четвороуглу $ABCD$ еквивалентан је сљедећим једнакостима:

$$\begin{aligned}\cos A\cos C &= \cos B\cos D\,,\\ \cos A\cos C &= \cos B\cos(A+B+C)\,,\\ \cos(A+C)+\cos(A-C) &= \cos(A+2B+C)+\cos(A+C)\,,\\ \cos(A-C)-\cos(A+2B+C) &= 0\,,\\ \sin(B+C)\sin(A+B) &= 0\,,\end{aligned}$$

   одакле слиједи да је $A+B=180^\circ$ или $B+C=180^\circ$, тј. $ABCD$ је трапез.

2. Ако за природне бројеве m,n, $m>n$ важи $m-n\,\big|\,m+n$, онда за неко $k\in\mathbb{N}$ вриједи

$$\frac{m+n}{m-n}=k,\quad \text{тј.}\quad \frac{m}{n}=\frac{k+1}{k-1}.$$

   Ово значи да разлика било која два изабрана броја мора бити барем 3.

   Ако су изабрани бројеви $x_1<x_2<\ldots<x_n$, онда је

$$x_1\ge 1,\ x_2\ge 4,\ x_3\ge 7,\ldots,x_{334}\ge 1000.$$

   Према томе, не може се изабрати више од 334 броја. Може тачно толико, на примјер: $1,4,7,\ldots,1000$, јер је разлика било која два од ових бројева дјељива са 3, а збир није.

3. Види 3. зад. за Трећи разред.

4. Види 4. зад. за Трећи разред.