24. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Бања Лука, 22. април 2017.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. Дат је разломак $\dfrac{\overline{2a27}}{\overline{7b22}}$, гдје су a и b цифре за које је $b-a=2$. Ако се његовом бројиоцу дода природан број n, а од имениоца се одузме исти тај број n, добијени разломак ће бити једнак $\dfrac{4}{5}$. Наћи n.

2. Дат је троугао ABC и тачке K и N на страницама AB и AC, редом, такве да је $KB = KN$. Нека је R средиште лука AB који не садржи тачку C. Права која садржи тачку R и нормална је на AB сијече дуж BN у тачки D. Доказати да тачке A, K, D, N припадају једној кружници.

3. Дата је табла $m \times n$ и три боје. Желимо да обојимо сваку дуж добијене мреже са једном од те три боје тако да сваки јединични квадрат има двије странице обојене једном бојом и двије странице обојене неком другом бојом. Колико има таквих бојења?

4. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $abc \leq 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 1+\frac{6}{a+b+c}\,.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да за произвољне реалне параметре a, b и c различите од нуле бар једна од једначина

$$ax^2+2bx+c=0, \quad bx^2+2cx+a=0 \ \text{ и } \ cx^2+2ax+b=0$$

има реалне коријене.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је D подножје висине из тјемена C на страницу AB. Претпоставимо да је $AD = 3\,BD$. Нека су M и N редом средишта страница AB и AC. Нека је P тачка таква да је $NP = NC$ и $CP = CB$, при чему B и P леже са различитих страна праве AC. Доказати да је $\angle APM = \angle PBA$.

3. Наћи све парове природних бројева (x, y), $x > y$, за које важи $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = 2017.$

4. Сегмент S дужине 50 је покривен са неколико сегмената дужине 1, од којих је сваки садржан у S. Ако било који од тих јединичних сегмената уклонимо онда S више неће бити потпуно покривен. Наћи максималан број јединичних сегмената који задовољавају ове услове.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. У једнакокраки трапез $ABCD$ уписана је кружница са центром O која додирује кракове BC и AD трапеза редом у тачкама M и N.

(a) Доказати да је $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD} = \dfrac{2}{MN}$;

(b) Ако су тачке A, O, M колинеарне, одредити углове тог трапеза.

2. Јединични квадрати табле $n \times n$, $n \geq 2$, обојени су црном или бијелом бојом тако да сваки црни квадрат има бар три бијела сусједа (сусјед је јединични квадрат са заједничком страницом). Колики је највећи број црних јединичних квадрата?

3. Дато је 2000 тегова са масама од 1^3, 2^3, $3^3, \ldots, 2000^3$ грама. Доказати да се они могу разбити у двије групе са подједнаким масама и са подједнаким бројем тегова (по 1000).

4. Одредити највећу константу C тако да неједнакост

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)^2 \geq C \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \cdots + x_6(x_1 + x_2))$$

важи за све реалне бројеве x_1, $x_2, \ldots, x_6$.

За добијено C одредити све x_1, $x_2, \ldots, x_6$ за које се достиже једнакост.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. На дужима HB и HC изабране су редом тачке K и L тако да је $\angle AKC = 90^\circ = \angle ALB$. Доказати да је $AK = AL$.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Доказати неједнакости

$$\frac{13}{72}-\frac{1}{2(n+1)^2}\leq\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{24}-\frac{1}{2(n+1)^2}\,.$$

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. *Одговор:* $n = 2017$. Дати услов је еививалентан редом са сљедећим једначинама

$$\frac{2a27+n}{7b22-n}=\frac{4}{5}\,,\quad 5(2a27+n)=4(7b22-n),$$

$$5n+4n=4\cdot(7072+100b)-5\cdot(2027+100a).$$

Замјењујући у посљедњој једнакости $b = a + 2$ слиједи да је

$$9n = 18753 - 100a. \tag{1}$$

Одавде добијамо да $9 \mid 18753 - 100a$, а како је

$$18753 - 100a = 18756 - 99a - (a + 3)$$

и како су бројеви 18756 и $99a$ дјељиви са 9, слиједи да је број $a + 3$ дјељив са 9. Како је a цифра, ово важи само за $a = 6$. Даље, за $a = 6$ се (1) своди на $9n = 18153$, одакле добијамо да је $n = 2017$.

2. Очигледно је права RD симетрала странице AB. Одавде закључујемо да важи $AD = BD$, тј. $\angle ABD = \angle BAD$. Такође, из услова $KB = KN$ имамо да је $\angle KBN = \angle KNB$. Сада је $\angle KAD = \angle BAD = \angle ABD = \angle KBN = \angle KNB = \angle KND$, па како се тачке A и B налазе у истој полуравни у односу на праву KD, тачке A, K, D, N припадају једној кружици.

3. Горња страница јединичног квадрата у горњем лијевом углу може се обојити на 3 начина. Затим, имамо 3 начина за избор друге странице истог тог квадрата која има исту боју као већ обојена страница. Преостале двије странице овог квадрата морају бити обојене истом бојом, а за ову боју имамо двије могућности. Закључујемо да јединични квадрат у горњем лијевом углу може бити обојен на $3\cdot3\cdot2 = 18$ начина. Даље, бојимо јединичне квадрате у првом реду слијева надесно. При томе је сваки пут лијева страница квадрата већ обојена. Имамо 3 начина да одаберемо страницу јединичног квадрата која ће бити обојена истом бојом као и његова лијева страница. За бојење преостале двије странице имамо двије могућности (боје). Према томе, имамо 6 начина за бојење сваког од ових квадрата. Настављамо слично са бојењем прве колоне. Бојимо јединичне квадрате одозго надоле и за сваки од њих имамо 6 начина бојења.

Сада бојимо квадрате у редовима $2, 3, \ldots, m$ и у колонама $2, 3, \ldots, n$. Бојимо их слијева надесно и одозго надоле. Код бојења сваког новог квадрата он већ има обојене двије странице: горњу и лијеву. Ако су ове странице различитих боја, онда су и боје преостале двије странице већ одређене, и постоје 2 начина за њихово бојење. А ако двије странице које су већ обојене имају исту боју, онда и остале двије странице имају исту боју. Та боја се може изабрати на два начина. Према томе, за сваки од ових квадрата постоје два могућа начина бојења.

Дакле, има $18 \cdot 6^{m-1} \cdot 6^{n-1} \cdot 2^{(m-1)(n-1)} = 2^{mn} \cdot 3^{m+n}$ таквих бојења.

4. Запишимо дату неједнакост у облику

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq a+b+c+6.$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3 \quad \text{и} \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Због тога је

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq a+b+c$$

и

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\sqrt[3]{abc} = 6.$$

Сабирањем посљедње двије неједнакости добијамо дату неједнакост.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Претпоставимо да ниједна од три дате једначине нема реалне коријене. Тада је $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$, одакле сабирањем добијамо да је

$$a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + bc.$$

Како је ова неједнакост еквивалентна са $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 < 0$, добили смо контрадикцију.

2. Како је N средиште странице AC то је $NC = NA$. По претпоставци је $NP = NC$, што значи да је $\angle APC$ периферијски угао над пречником AC, па је $\angle APC = 90°$. Пошто је $AD = 3\,BD$ и M средиште дужи AB то је $MD = BD$. Осим тога је $\angle CDB = 90° = \angle CDM$, па су троуглови CDB и CDM подударни, одакле слиједи да је $CB = CM$.

По претпоставци је $CP = CB$, па је C центар кружнице која пролази кроз тачке P, M и B. Како је $\angle APC = 90°$ то је AP тангента ове кружнице. Због тога је $\angle APM = \angle PBM = \angle PBA$.

3. Једначина $x^2 + y^2 = 2017(x + y)$ је еквивалентна са једначинама

$$x^2 + y^2 - 2017(x + y) = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot 2017(x + y) = 0,$$

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 - 2 \cdot 2017(x + y) = 0,$$
$$(x - y)^2 + (x + y - 2017)^2 = 2017^2.$$

Ако је $x + y \leq 2017$ онда је $2017(x + y) \geq (x + y)^2 > x^2 + y^2$ па дата једначина нема рјешења. Дакле, $x + y > 2017$ па користећи формулу за Питагорине тројке добијамо да постоје природни бројеви m и n, $m > n$, такви да је

$$x - y = 2mn, \quad x + y - 2017 = m^2 - n^2, \quad 2017 = m^2 + n^2,$$

или

$$x - y = m^2 - n^2, \quad x + y - 2017 = 2mn, \quad 2017 = m^2 + n^2.$$

Како је 2017 прост број облика $4k + 1$ једначина $m^2 + y^2 = 2017$ има јединствено рјешење. То је пар $(m, n) = (44, 9)$. Даље добијамо системе линеарних једначина

$$x - y = 792, \quad x + y - 2017 = 1855,$$

$$x - y = 1855, \quad x + y - 2017 = 792,$$

чија су рјешења $(x, y) = (2332, 1540)$ и $(x, y) = (2332, 477)$. То су уједно и једина рјешења дате једначине.

4. Нека су S_1, $S_2, \ldots$ сегменти дужине 1 који покривају сегмент S гледано слијева надесно. Доказаћемо најприје да су било која два сегмента S_k и S_{k+2} дисјунктна. Ако би нека два сегмента S_k и S_{k+2} имала заједничку тачку онда би њихова унија био сегмент који садржи сегмент S_{k+1}. Тада бисмо сегмент S_{k+1} могли избацити а сегмент S би био покривен осталим сегментима, што је контрадикција са условом задатка. Пошто је дужина сегмента S једнака 50, то значи да сегмената S_i, како са непарним тако и са парним индексима понаособ, може бити највише 49, тј. можемо имати највише 98 сегмената дужине 1 који покривају S.

На примјеру ћемо показати да се тај максималан број може и постићи. Посматрајмо сегмент $I = [0, 50]$ на бројевној правој. Уочимо на овом сегменту тачке M_i које имају бројевне вриједности $\dfrac{1}{2}+(i-1)\cdot\dfrac{49}{97}$, $i=1,2,\ldots,98$. Нека су S_i сегменти дужине 1 чија су средишта тачке M_i, $i=1,2,\ldots,98$. Како је $M_iM_{i+2}=98/97$, $(1\leq i\leq 96)$, сегменти S_i и S_{i+2} су раздвојени дужином $1/97$, коју покрива само сегмент S_{i+1}, што значи да не можемо уклонити ниједан од сегмената S_i, $i=1,2,\ldots,98$, јер би S истао непокривен.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је r полупречник кружнице уписане у дати трапез и нека су K и L редом средишта његових основица AB и CD. Нека је $P=KL\cap MN$ и $\angle BAO=\varphi$, тј. $\angle BAD=2\varphi$. Посматрајмо четвороугао $OLDN$. Он има праве углове у тјеменима L и N, а како је $\angle NDL=\angle ADC=180^\circ-\varphi$, слиједи да је $\angle NOL=2\varphi$. Правоугли троуглови OLD и OND су подударни, па је $\angle DOL=\varphi$.

(a) Сада из правоуглих троуглова AKO, OLD и OPN добијамо

$$AK=r\operatorname{ctg}\varphi,\quad DL=r\operatorname{tg}\varphi,\quad NP=r\sin 2\varphi,$$

па је

$$AB=2r\operatorname{ctg}\varphi,\quad C=2r\operatorname{tg}\varphi,\quad MN=2r\sin 2\varphi.$$

Одавде слиједи да је

$$\frac{MN}{AB}+\frac{MN}{CD}=\frac{2r\sin 2\varphi}{2r\operatorname{ctg}\varphi}+\frac{2r\sin 2\varphi}{2r\operatorname{tg}\varphi}=2\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi=2,$$

што је и требало доказати.

(b) Ако су тачке A, O, M колинеарне, онда су углови $\angle AOK$ и $\angle MOL$ унакрсни, па је $\angle AOK$ и $\angle MOL$. Како је $\angle AOK=90^\circ-2\varphi=\angle MOL=2\varphi$, слиједи да је $90^\circ-2\varphi=2\varphi$, тј. $\varphi=30^\circ$. Дакле, оштри угао тог једнакокраког трапеза је 60°, а тупи угао је 120°.

2. Уочимо најприје да су јединични квадрати у угловима табле обојени бијелом бојом (јер имају само два сусједа). Такође, у врстама (колонама) које се налазе уз ивице табле, не могу бити два сусједна јединична квадрата обојена црном бојом, јер не би могли имати три сусједна бијела јединична квадрата. Примијетимо да из истог разлога у сваком квадрату 2×2 можемо имати највише два црна јединична квадрата.

Ако је n непаран број, подијелимо таблу у 4 дијела: квадрат $(n-1)\times(n-1)$ који садржи све јединичне квадрате у првих $n-1$ врста и $n-1$ колона (гледан од дна ка врху), правоугаоник $(n-1)\times 1$ уз десну ивицу табле, правоугаоник $1\times(n-1)$ уз горњу ивицу табле и јединични квадрат у горњем десном углу табле. Ако квадрат $(n-1)\times(n-1)$ издијелимо на квадрате 2×2 (којих има $(n-1)^2/4)$, јасно је да ћемо у њему имати највише $(n-1)^2/2$ црних квадрата. Такође, у правоугаоницима $1\times(n-1)$ и $(n-1)\times 1$ можемо имати највише $(n-1)/2$ црних квадрата, а пошто је горњи десни квадрат бијеле боје, максималан број црних квадрата је

$$\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{2}\,.$$

Овај максимум се може достићи ако таблу обојимо ,,шаховски" црно-бијело, са бијелим јединичним квадратима у угловима.

Ако је n паран број, подијелимо таблу у 9 дијелова: квадрат $(n-2)\times(n-2)$ у средини табле, 4 правоугаоника $(n-2)\times 1$ или $1\times(n-2)$ уз ивице табле и 4 јединична квадрата у угловима табле. Ако квадрат $(n-2)\times(n-2)$ издијелимо на квадрате 2×2, а правоугаонике на мање правоугаонике 1×2 или 2×1, можемо имати максимално

$$\frac{(n-2)^2}{2}+4\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{n^2-4}{2}$$

црних квадрата.

Овај максимум се може достићи ако таблу $n\times n$ обојимо на шаховски начин, а онда два црна квадрата која се налазе у угловима табле пребојимо у бијело, те имамо таблу која задовољава услове задатка и која има $\dfrac{n^2}{2}-2=\dfrac{n^2-4}{2}$ црних поља.

3. Како је $2000=16\cdot 125$ довољно је доказати да за сваких 16 узастопних природних бројева постоји такво разбијање. Имамо да је

$$(k+1)^3+(k+4)^3-(k+2)^3-(k+3)^3=(k+4)^3-(k+3)^3-((k+2)^3-(k+1)^3)=$$

$$=(k+4)^2+(k+4)(k+3)+(k+3)^2-(k+2)^2-(k+2)(k+1)-(k+1)^2=12k+30,$$

$$(1)\qquad (k+1)^3+(k+4)^3=(k+2)^3+(k+3)^3+12k+30.$$

Ако у (1) умјесто k ставимо $k+4$ добијамо да је

$$(2)\qquad (k+6)^3+(k+7)^3+12(k+4)+30=(k+5)^3+(k+8)^3.$$

Сабирањем (1) и (2) добијамо

$$(3)\quad (k+1)^3+(k+4)^3+(k+6)^3+(k+7)^3+48=(k+2)^3+(k+3)^3+(k+5)^3+(k+8)^3.$$

Ако у (3) умјесто k ставимо $k+8$ добијамо да је
(4)
$$(k+10)^3+(k+11)^3+(k+13)^3+(k+16)^3=(k+9)^3+(k+12)^3+(k+14)^3+(k+15)^3+48.$$

Сабирањем (3) и (4) добијамо да је

$(k+1)^3+(k+4)^3+(k+6)^3+(k+7)^3+(k+10)^3+(k+11)^3+(k+13)^3+(k+16)^3 =$

$= (k+2)^3+(k+3)^3+(k+5)^3+(k+8)^3+(k+9)^3+(k+12)^3+(k+14)^3+(k+15)^3,$

што је и требало доказати.

4. Примијетимо да се израз на десној страни дате неједнакости

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5+x_4x_6+x_5x_6+x_1x_5+x_1x_6+x_2x_6$

може записати у облику

$$(x_1+x_4)(x_2+x_5)+(x_2+x_5)(x_3+x_6)+(x_3+x_6)(x_1+x_4).$$

Користећи смјену $X = x_1 + x_4$, $Y = x_2 + x_5$ и $Z = x_3 + x_6$, дата неједнакост постаје

$$(X+Y+Z)^2 \geq C \cdot (XY+YZ+ZX),$$

гдје су X, Y и Z произвољни реални бројеви.

За $X = Y = Z = 1$ имамо да је $9 \geq 3C$, тј. $C \leq 3$.

Докажимо сада да неједнакост

$$(X+Y+Z)^2 \geq 3(XY+YZ+ZX),$$

важи за произвољне реалне бројеве X, Y и Z. Како је ова неједнакост еквивалентна са $(X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2 \geq 0$, она очито важи. При томе, једнакост важи само ако је $X = Y = Z$, тј. $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Означимо са P и Q подножја висина спуштених из тјемена C редом на странице AC и AB. Тада имамо сљедеће парове сличних троуглова

$$\triangle AKC \sim \triangle APK, \quad \triangle ABP \sim \triangle ACQ, \quad \triangle ALB \sim \triangle AQL,$$

јер су сви ови троуглови правоугли и троуглови у истом пару имају заједнички оштри угао. Слиједи да је

$$AK^2 = AP \cdot AC = AQ \cdot AB = AL^2, \text{ тј. } AK = AL$$

.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Лијеву неједнакост доказујемо математичком индукцијом. За $n = 2$ важи једнакост $\dfrac{13}{72} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{8}$. Нека је $n > 2$. Претпоставимо да неједнакост важи за $n-1$, тј. да је

$$\frac{13}{72} - \frac{1}{2n^2} \le \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^3}. \tag{1}$$

Довољно је још доказати да за сваки природан број n важи

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} \le \frac{1}{n^3}, \tag{2}$$

јер сабирањем (1) и (2) добијамо да лијева неједнакост важи за n.

А неједнакост (2) важи пошто је еквивалентна са $n(n+1)^2 - n^3 \le 2(n+1)^2$, тј. $0 \le 3n + 2$.

За доказ десне неједнакости процијенимо општи члан $\dfrac{1}{k^3}$. Имамо за $k \ge 2$

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right),$$

тј.

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

На основу овога је за $n > 2$

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2^3} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{5}{24} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{24} - \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

Примједба. Ми смо у ствари доказали јачу неједнакост

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{24} - \frac{1}{2n(n+1)},$$

која се такође лако доказује математичком индукцијом.

Задатке припремили: Видан Говедарица и Марко Ћитић.