ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2002/2003.

Београд 2003

СПОНЗОРИ РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

- Скупштина општине Шабац
- Туристичка организација општине Шабац
- УНО–МАРТИН, Шабац
- ЛУКАНА, Шабац
- ТРИАНГЛ ПАПИР, Шабац
- МЛЕКАРА, Шабац
- РЕФЛЕКС, Мајур

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР

РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
29. МАРТА 2003. ГОДИНЕ

1. Дамњановић Наталија, Скупштина општине Шабац
2. Илић Вероljуб, директор Шабачке гимназије
3. Лазић Саша, помоћник директора Шабачке гимназије
4. Бељић Милорад, професор, Економска школа, Шабац
5. Исаиловић Миољуб, наставник, ОШ "Милева Косовац", Шабац
6. Шимић мр Гроздана, професор, Виша школа за образовање васпитача, Шабац
7. Мозетић Синиша, професор Шабачке гимназије
8. Ћорилић Мирјана, професор Шабачке гимназије
9. Дорословачки др Раде, Друштво математичара Србије
10. Цветиновић Пера, надзорник за математику
11. Јовановић Живка, професор Шабачке гимназије
12. Нагл мр Мирко, професор Шабачке гимназије

Редакција и обрада:

Ђорђе Кртинић

Запис о Шапцу

Шабац је град који се налази на јужном ободу Панонске низије, на десној обали реке Саве, а недалеко се, на двадесетак километара, диже планина Цер, на тромеђи Мачве, Поцерине и Шабачке Посавине, 85 километара западно од Београда, односно 103 километара од ушћа Саве у Дунав.

У раном средњем веку постојало је насеље под именом Заслон, а за званични почетак насеља сматра се 1470. година, када су Турци саградили тврђаву на Сави, ради даљег продирања у тадашње мађарске земље преко Саве. Име града потиче, вероватно, од реке Саве, Савац, на Sabbatz, како га је називао и угарски краљ Матија Корвин. Шабац је у турским рукама од 1521. године, па са малим прекидима до 1807. године, када постаје српски, да би се Турци у њега вратили 1813. године и у тврђави остали до коначне предаје градова кнезу Михаилу 1867. године.

Град је у новијој историји(XX век) још два пута страдао од Аустроугарске и Немачке(1914. и 1941.), у оба случаја рушен, а становништво готово преполовљено.

Као погранични град према Аустрији, град се, после ослобођења од Турака, веома брзо развијао(занати, трговина), па се део средстава разменом добара користио за отварање културних, здравствених и образовних институција(основне школе, гимназија, болница, позориште, а ту је и двор Јеврема Обреновића), а постепено се мењао и модернизовао укупан начин живота грађана, па је Шабац у том периоду назван "Мали Париз".

Индустријализација града започиње крајем тридесетих година прошлог века подизањем првих погона хемијске индустрије. Привредна структура је условљена сировинским залеђем, које је углавном пољопривредно, па су подигнути погони за прераду пољопривредних производа. Поред ових, развијена је и производња намештаја, обуће, кожне галантерије, фармацеуцка и индустрија неметала и пластике.

Река Сава и планина Цер, као и већи број културно-историјских споменика у околини града, као и обиље дивљачи, пружају могућност за развој туризма, али се те могућности слабо користе.

Спортисти су, и поред слабе материјалне основе, знали да осветлају образ свог града. Ту су, у првом реду, рукометаши Металопластике(двоструки прваци Европе), рукометни клуб Медицинар, Одбојкашки клуб Шабац, ФК Мачва, борилачки спортови.

Према последњем попису(2002. године), град има 58 000 становника, а са предграђима око 82 000. Доскора је био пети у ужој Србији, а 11. у Југославији, а данас су испред њега и Чачак, Краљево, Крушевац, Смедерево и Ваљево.

И поред тешког материјалног стања, у граду постоји велики број здравствених, културних, јавних и спортских организација. Тако имамо општу болницу са великим бројем здравствених станица(скоро у сваком селу), позориште, Културни центар, музеј, библиотеку, музичку школу, КУД Абрашевић и Чивија, неколико музичких ансабала, једну државну и неколико приватних ТВ и радио станица, велики број спортских друштава(рукомет, кошарка, фудбал, тенис и разни борилачки спортови), који се такмиче у ранговима од општинских до прве савезне лиге.

Шабац се до сада показао као добар организатор и домаћин многих културних манифестација.

Неколико речи о школи домаћину

Гимназија у Шапцу, основана 1837. године(до 1871. године једина ове врсте у Подрињу), заједно са гимназијом у Крагујевцу, Чачку и Зајечару, стоји у темељу новије писмености српског народа.

На простору где се време мерило и одређивало бунама и ратовима, 166 година просветне установе има већу тежину и значај него другде.

Већ у првој деценији рада Гимназија у Шапцу потврдила се као културно средиште града и као покретач културних акција далекосежних размера и одјека. Треба имати на уму да је Шабац у то време, захваљујући и Гимназији, предњачио у много чему у Србији(по попису становништва 1844. године, Шабац је био одмах иза Београда, двоструко бројнији од Крагујевца и Зајечара, четвороструко од Чачка). Већ 1840. године, пред Божић, три године после отпочињања са радом, у Гимназији су изведене прве позоришне представе напором наставника Дамјана Маринковића и ђачке дилетантске дружине. То је зачетак позоришног живота у Шапцу, коме, испод Саве и Дунава, у свим српским градовима, једино Београд стоји равноправно.

Тачно 29. септембра 1847. године, напором професора и ђака Гимназије, отвара се прво читалиште у Шапцу, једно од првих у то време и дуго међу водећим у Србији. Без њега не би било ни чувеног културног напретка и резултата Живорада Жике Поповића, професора Гимназије у Шапцу између два рата, па ни данашње Народне библиотеке у Шапцу.

Већ 1858. године у Гимназији у Шапцу формира се професорска библиотека, која ће бити узорна за многе, касније покренуте, у Србији, а идеју о набавци прве штампарије тадашњег управника школе забраниће власт. Идеју ће касније реализовати песник Владимир Јовановић, професор тадашње гимназије, издавањем недељног листа "Шабачки гласник", а још касније штампање чувеног часописа "Звезда" Јанка Веселиновића.

У Гимназији у Шапцу 1865. године формирано је певачко друштво, једно од водећих у Србији све до краја деветнаестог века. Тако се и наставак организованог музичког рада у Шапцу везује за Гимназију. Тај живот имаће своју кулминацију у првој половини двадесетог века, у раду композитора и професора Гимназије Роберта Толингера.

У 1884. години у Гимназији у Шапцу формираће се гласовита књижевна дружина **Поука** са књижницом и читаоницом. Била је једна од првих литерарних дружина и ђачких књижница у тадашњој Србији. Њен рад сеже у време после другог светског рата и однеговала је великане писане речи у Србији.

Зашто не рећи, идеја о Вуковом сабору у Тршићу и обнављање Вукове родне куће, рођена је у Гимназији у Шапцу, а довршили су је њени професори Живорад Жика Поповић, Љубомир Павловић и Тихомир Ђукић.

За својих 166 година постојања Гимназија у Шапцу школовала је неколико десетина хиљада младих људи. Неки од њих и њихових професора досегли су највише домете научне мисли и уметничког израза. Поменимо само неке: научници Јован Цвијић, Стојан Новаковић, Љубомир Стојановић, Стојан Бошковић, Павле Поповић, Бошко Нováковић, Милутин Радовановић... сликари Стеван Чалић, Миливоје Николајевић, Милић од Мачве... књижевници Милорад Поповић Шапчанин, Јанко Веселиновић, Лаза К. Лазаревић, Исидора Секулић, Владимир Јовановић, Јован Ђорђевић, Јова Илић, Станислав Винавер, Коста Абрашевић, Душан Матић и многи, многи други.

У школи је данас 710 ученика и 65 запослених.

У њој је 24 одељења природно-математичког и друштвено-језичког смера. Настава се одвија у савремено опремљеним кабинетима и вероватно најлепшој спортској хали у Србији.

Протеклих деценија ученици Шабачке Гимназије постизали су запажене резултате-прва, друга, трећа и друга висока места на такмичењима републичког, савезног и међународног ранга из физике, хемије, биологије, математике, информатике, географије, српског језика, ликовне културе, физичког васпитања и др.

Школа је до сада била организатор разних такмичења, а 29. марта ове године биће домаћин Републичког такмичења из математике и тако наставити дугогодишњу традицију.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2002/2003.

1. Анић мр Иван, Математички факултет, Београд
2. Балтић Владимир, Економски факултет, Београд
3. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
5. Драговић Владимир, Математички институт САНУ
6. Дугошија Ђорђе, Математички факултет, Београд
7. Ђукић Душан, Математички факултет, Београд
8. Живковић др Миодраг, Математички факултет, Београд
9. Каделбург др Зоран, Математички факултет, Београд
10. Кнежевић Миљан, Математички факултет, Београд
11. Кртинић Ђорђе, Математички факултет, Београд — председник Републичке комисије
12. Лазовић Небојша, Министарство просвете и спорта Републике Србије
13. Лаудановић мр Младен, Математички факултет, Београд
14. Маринковић Растко, Математичка гимназија, Београд
15. Матић Иван, Математички факултет, Београд
16. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
17. Младеновић др Павле, Математички факултет, Београд
18. Николић Небојша, Факултет организационих наука, Београд
19. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
20. Павловић Иван, Гимназија Вук Караџић, Лозница
21. Радновић мр Милена, Математички институт САНУ
22. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
23. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
24. Тошић др Ратко, ПМФ, Нови Сад
25. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 18. 01. 2003.

Први разред – А категорија

1. Наћи највећи заједнички делилац бројева $\underbrace{11111111}_{8}$ и $\underbrace{111\ldots11}_{100}$.

2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?

3. Нека су a, b и c странице троугла и

$$p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \qquad q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.$$

Доказати да је $|p - q| < 1$.

4. Дијагонала AC четвороугла $ABCD$ уписаног у круг је пречник тог круга. Доказати да су пројекције страница AB и CD на дијагоналу BD једнаке.

5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

Други разред – А категорија

1. Базен се пуни двема цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

2. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

3. Нека су a и b реални бројеви такви да је $(\forall x \in \mathbb{R})\ a\cos x + b\cos 3x \leq 1$. Доказати да је тада $|b| \leq 1$.

4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\measuredangle BCA = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D. Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC, редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. На катетама једнакокрако–правоуглог троугла ABC ($\measuredangle BCA = 90^\circ$), изабране су тачке $D \in AC$ и $E \in BC$, такве да је $CD = CE$. Нека су K и L тачке са дужи AB, такве да је $DK \perp AE$ и $CL \perp AE$. Доказати да је $KL = LB$.

Трећи разред – А категорија

1. Доказати да једначина $x^n + y^n = z^n,\ n \in \mathbb{N}$ нема решења у скупу природних бројева, где је $z \leq n$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\cdot 2^x & + & 2y & - & 3\arcsin z & = & 7 \\ 2^x & - & y & - & \arcsin z & = & -6 \\ 5\cdot 2^x & - & y & + & \arcsin z & = & 6a+2. \end{array}$$

3. На колико начина се број 2002 може представити у облику збира нерастућих природних бројева (више од једног сабирка) таквих да је и њихов производ једнак 2002?

4. Нека су $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла ABC и l_a дужина симетрале угла код темена A. Доказати да, ако важи $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{l_a}$, онда је $\measuredangle BAC = 120^\circ$.

5. Многоугао који је описан око круга полупречника r, разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

2. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

3. Доказати да за реалне бројеве a и b важи

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a^3 - 12a - 16 \leq b^3 - 12b + 16.$$

4. Нека су $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла $\triangle ABC$ у коме је $\measuredangle BAC = 3 \cdot \measuredangle ABC$. Доказати да је тада

$$bc^2 = (a-b)^2(a+b).$$

5. Многоугао који је описан око круга полупречника r разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r.

Први разред – Б категорија

1. Испитати када израз $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$, $n \in \mathbb{N}$ није дељив са 18.

2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?

3. Бува се налази у координатној равни. Из тачке (m, n) бува може да скочи у једну од тачака (n, m), $(m-n, n)$ или $(m+n, n)$. Да ли бува може да дође у тачку $(12, 32)$ ако се на почетку налази у тачки
а) $(7, 12)$; **б)** $(8, 12)$?

4. Познато је да су сви Плинкови Планкови и да су неки од Плонкова Плинкови. Који искази морају бити тачни:
а) "Неки Планкови су Плонкови."
б) "Неки Плинкови нису Плонкови."
в) "Ниједан Плонк није Планк."

5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

Други разред – Б категорија

1. Базен се пуни двема цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

2. Решити једначину: $(x-3)^4+(x-4)^4=(2x-7)^4$, у скупу комплексних бројева.

3. Нека су a,b,c позитивни бројеви, такви да важи $a^2+b^2+c^2=1$. Доказати да је $a(b+c)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\measuredangle BCA=90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D. Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC, редом. Доказати да је

$$AD^2+BD^2=(AE+BK)^2.$$

5. Наћи све природне бројеве n, такве да је број $z=\left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^n$ реалан.

Трећи разред – Б категорија

1. У паралелограму са странама a, b и оштрим углом α конструисане су симетрале унутрашњих углова. Одредити површину четвороугла одређеног тим симетралама.

2. Решити једначину $4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0$.

3. На равном столу налазе се три лопте, полупречника r_1, r_2, r_3. Оне додирују сто у тачкама A_1, A_2 и A_3, редом, и сваке две се међусобно додирују. Ако је $A_1A_2 = 4, A_2A_3 = 6, A_1A_3 = 8$, наћи r_1, r_2, r_3.

4. У тространој пирамиди $SABC$ сви ивични углови код темена S су прави. Нека је O подножје висине пирамиде из темена S. Ако је површина троугла AOB четири пута већа од површине троугла BOC, наћи однос површина троуглова ASB и BSC.

5. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да сви комплексни бројеви z, за које важи $|z-1| = 2|z+1|$, припадају једном кругу. Наћи центар и полупречник тог круга.

2. Наћи све просте бројеве p за које је број $7p+1$ квадрат природног броја.

3. Наћи реална решења система једначина

$$x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0.$$

4. Нека је $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ аритметички низ. Доказати да важи :

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d},$$

где је d разлика низа.

5. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 01. 03. 2003.

Први разред – А категорија

1. Нека је k природан број. Доказати да број $2^{2k-1}+2^k+1$ није дељив са 7.

2. У скупу целих бројева решити једначину

$$2m^2+n^2=2mn+3n.$$

3. Доказати да за свако $n \geq 2$ постоји n различитих природних бројева, таквих да је збир њихових квадрата квадрат природног броја.

4. Нека су t_a и t_b тежишне дужи, које одговарају страницама BC и CA троугла ABC, а P његова површина. Доказати да важи

$$t_a \cdot t_b \geq \frac{3}{2}P.$$

Када важи једнакост ?

5. У равни су дате две тачке и права. Конструисати троугао ABC, код кога су те две тачке средишта страница BC и CA, а висина из темена A припада датој правој.

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x+3}=\sqrt{6x^2-2x-18}.$$

2. На колико начина таблица $m \times n$ може да се попуни бројевима 1 и -1, тако да производ бројева у свакој врсти буде једнак 1, а производ бројева у свакој колони буде -1?

3. Дат је круг полупречника 1. У његовој унутрашњости или на граници, изабрано је 8 тачака. Доказати да међу њима постоје две, чије је растојање мање од 1. Да ли тврђење важи за 7 тачака ?

4. Тачке A, B и C припадају једној правој. Над AB, BC и AC, као пречницима, са исте стране те праве, конструисане су три полукружнице. Центар кружнице k, која додирује сваку од три дате полукружнице, налази се на растојању d од праве AC. Наћи полупречник кружнице k.

5. Троугао састављен од тежишних дужи троугла ABC сличан је троуглу ABC. Наћи коефицијент сличности.

Трећи разред – А категорија

1. Дата је једначина $x^3 - px + q = 0$, $q \neq 0$, која има три реална решења.
а) Доказати да је $p > 0$.
б) Ако је и $q > 0$, доказати да за најмањи по апсолутној вредности корен ове једначине, α, важи $|\alpha| \leq \min\left(\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}.$$

3. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је 45°, а координате свих темена су цели бројеви.

4. Дата је тачка P унутар неког неког круга. Кроз тачку P постављамо две међусобно нормалне тетиве. У ком положају је збир дужина тих тетива најмањи, а у ком највећи и колике су те екстремне вредности, ако је полупречник кружнице R, а растојање тачке P од центра те кружнице d $(0 < d < R)$?

5. Нека је $a = \sqrt[2003]{2003}$. Шта је веће $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}$2003 пута или 2003?

Четврти разред – А категорија

1. У скупу комплексних бројева решити систем :

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 5$$

$$x^3y + xy^3 = 1.$$

2. Доказати да за сваки природан број n важи

$$(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n.$$

3. Нека је $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да су за свако $k, n \in \mathbb{N}$ бројеви $ka_{n+2} + a_n$ и $ka_{n+3} + a_{n+1}$ узајамно прости.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је P полином са целобројним коефицијентима, такав да је $0 < |P(i)| < n$ за $i = 1, \ldots, n$. Доказати да полином P нема целобројну нулу.

5. Наћи највећу могућу запремину правилне четворостране пирамиде, бочне ивице 1 .

Први разред – Б категорија

1. Нека је n природан број. Доказати да је број $8n^3 - 12n^2 + 6n + 63$ сложен.

2. Нека је четвороугао $ABCD$ и тетивни и тангентни. Ако је разлика страница AD и BC једнака разлици страница AB и CD, доказати да је AC пречник круга описаног око четвороугла $ABCD$.

3. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Познато је да се разломак $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$ може скратити неким природним бројем. Наћи број којим се овај разломак може скратити.

4. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за коју важи $f(x^2) - (f(x))^2 \geq \dfrac{1}{4}$ за свако $x \in \mathbb{R}$ није инјективна (тј. постоје $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ такви да $f(x_1) = f(x_2)$).

5. У равни су дата два скупа паралелних правих $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ и b_1, $b_2, \ldots, b_7$. Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је паралелограма одређено овим правама ?

Други разред – Б категорија

1. Доказати да за свако природно n, $n \geq 2$ важи неједнакост :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

2. Одредити све комплексне бројеве z за које важи $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$.

3. Нека једначина $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0, a \in \mathbb{R}, a \neq 1$ има решења x_1 и x_2. Одредити вредност параметра b, тако да производ $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависи од a.

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

5. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена A на хипотенузу BC, E је средиште дужи AD, а F је пресек правих BE и AC. Ако је $BD = 4$, $CD = 9$, наћи дужину дужи BF.

Трећи разред – Б категорија

1. Основице правоуглог трапеза у кога се може уписати круг су a и b. Израчунати површину овог трапеза.

2. У лопту је уписана пирамида, чија је основа правоугаоник дијагонале d. Бочне ивице пирамиде нагнуте су према равни основе под углом β. Наћи полупречник лопте.

3. Наћи све целе бројеве x, такве да је $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ цео број.

4. Доказати да важи $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

5. Доказати да за $p \geq 0$ важи неједнакост

$$(2003^p)^{1-2003^p} + (2003^{2p})^{1-2003^{2p}} + \cdots + (2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}} \leq 2003.$$

Четврти разред – Б категорија

1. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)$.

2. Доказати да функција $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}, x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, не узима вредности између $\frac{1}{4}$ и 1.

3. Наћи све аритметичке прогресије код којих је однос збира првих n чланова и збира следећих $2n$ чланова ($n \in \mathbb{N}$) константа независна од n.

4. Доказати да једначина $ax^3 + bx^2 - 1 = 0, a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ има тачно једно позитивно решење.

5. Одредити висину ваљка максималне запремине уписаног у лопту полупречника $\sqrt{3}$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 29. 03. 2003.

Први разред – А категорија

1. Нека су x и y ненегативни реални бројеви такви да је $x + y = 2$. Доказати да важи

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2.$$

Када важи једнакост?

2. Дат је број $2^k, k > 3$. Доказати да се пермутацијама цифара овог броја не може добити број 2^n, где је $n > k$.

3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

4. Кружница која је уписана у троугао ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама M и N. Нека је P тачка пресека симетрале угла $\measuredangle ABC$ и праве MN. Доказати да је површина троугла ABC два пута већа од површине троугла ABP.

5. На страницама BC, CA и AB троугла ABC уочене су тачке A_1,B_1 и C_1, редом. Нека је T тежиште троугла ABC, а T_1 тежиште троугла $A_1B_1C_1$. Доказати да је $T \equiv T_1$ ако и само ако је $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$.

Други разред – А категорија

1. Доказати да квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$, имају заједничко решење ако и само ако важи $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T(не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

3. Нека су a, b, c реални бројеви, такви да је $0 < a \leq b \leq c$. Доказати да важи

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc.$$

Када важи једнакост?

4. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?

5. Круг k у тачкама P и Q додирује краке угла $\measuredangle pOq$. На полуправој Oq је дата тачка X, тако да пресечна тачка Z круга k и праве PX различита од P полови дуж PX. Ако је Y пресечна тачка круга k и праве OZ различита од Z, доказати да је $PX \| QY$.

Трећи разред – А категорија

1. а) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ такав да за свако $k \geqslant 2$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}?$$

б) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ такав да за свако $2 \leqslant k \leqslant 2002$ важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}?$$

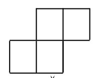
2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k.

3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

4. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{3}\right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. Колико се највише фигура подударних са  може поставити у таблу 2003×2003 без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V, површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k.

3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

4. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{3}\right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. На кружници је дато n тачака. Никоје три дужи које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове дужи деле круг?

Први разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне x и y важи

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geqslant 1.$$

Када важи једнакост?

2. Наћи најмањи природан број који је четири пута мањи од броја написаног истим цифрама, али у обрнутом поретку.

3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

4. Ако су x, y, z, u природни бројеви већи од 1, такви да важи $xy = zu$, доказати да је број

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$$

сложен природан број.

5. Дат је полукруг над пречником AB и на њему тачке C и D тако да је $\measuredangle CSD$ прав, где је S средиште дужи AB. Нека је E пресек правих AC и BD, а F пресек правих AD и BC. Доказати да је $EF \perp AB$ и $EF = AB$.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} + (3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 2.$$

2. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T(не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

3. Дата је квадратна једначина $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу $(0,1)$, доказати да је $a(2c+b)<0$.

4. У кружни одсечак коме одговара централни угао од 120° уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга $2+\sqrt{19}$.

5. Доказати да је број $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$ цео и израчунати га.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице SA,SB и SC међусобно нормалне и $AB = BC = a, BS = b$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 6y & + & z & = & 1 \\ x & + & 6ay & + & z & = & 6 \\ x & + & 6y & + & az & = & 1. \end{array}$$

3. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвесног четвороугла. Доказати да важи $P \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$. Када важи једнакост?

4. Нека је E средиште странице AB квадрата $ABCD$, а F и G тачке на страницама BC и CD, редом, такве да је $EF \| AG$. Доказати да је FG тангента на круг уписан у квадрат $ABCD$.

5. Ако за оштре углове α, β и γ важи $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$, $\cos\beta = \mathrm{tg}\gamma$ и $\cos\gamma = \mathrm{tg}\alpha$, доказати да је $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V, површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

2. Наћи

$$\lim_{x\to 1} \frac{x(x^{2003}-1) - 2003(x-1)}{(x-1)^2}.$$

3. Решити систем

$$x - y + z = 6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad x^3 - y^3 + z^3 = 36.$$

4. Одредити тачку на елипси $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} = 1$ у првом квадранту, такву да тангента на елипсу у тој тачки гради са координатним осама троугао најмање површине.

5. Дат је низ тачака $T_i(x_i, y_i)$ у xOy равни, тако да је $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и $x_{n+1} = \sqrt{3}x_n - y_n$, $y_{n+1} = x_n + \sqrt{3}y_n$ за $n \geqslant 0$. У ком квадранту се налази тачка T_{2003}?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Нека је $b = \underbrace{11111111}_{8}$ и $a = \underbrace{111\ldots11}_{100}$.Када поделимо ове бројеве, добија се $1111 = a - qb$, где је q цео број – количник. Сваки заједнички делилац a и b дели и 1111, па је тражени број највећи заједнички делилац за b и 1111, а како је b дељиво са 1111, то је $NZD(a,b) = 1111$.

2. Школу треба изградити на путу између села A и B, иначе можемо смањити оба растојања. Нека је школа на растојању x од села A. Тада је она на растојању $3-x$ од села B, па је укупан пут који прелазе сви ђаци до школе (два пута мањи од укупног дневног пута) $100x + 50(3 - x) = 50x + 150$, што је за $x \in [0,3]$ најмање за $x = 0$. Дакле, школу треба изградити у месту A.

3. Како је, по неједнакости троугла, $|a-b| < c$, $|b-c| < a$ и $|c-a| < b$, следи

$$|p-q| = \left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right| = \frac{|a-b||b-c||c-a|}{abc} < \frac{cab}{abc} = 1.$$

4. Нека је P подножје нормале из центра описаног круга O на дијагоналу BD, и нека су A_1, C_1 подножја нормала из A, C на BD, редом. Тада је, због $AO = CO$, $A_1P = PC_1$, па је $BA_1 = BP - A_1P = DP - PC_1 = C_1D$, што је и требало доказати.

5. Нека су a, b, c, d, e редом бројеви положених испита од прве до пете године. Тада је $a < b < c < d < e, a+b+c+d+e = 31, e = 3a$. Ако би било $a \geq 4$, тада $b \geq 5, c \geq 6, d \geq 7, e \geq 12$, па $a+b+c+d+e \geq 34 > 31$, што је немогуће. Ако је $a = 1$, тада $e = 3$, па $1 < b < c < d < 3$, што је немогуће. Ако је $a = 2$, тада $e = 6$, па је $2 < b < c < d < 6$, тј. мора бити $b = 3, c = 4, d = 5$, односно $a+b+c+d+e = 20 \neq 31$. Дакле $a = 3, e = 9$. За $d \leq 7$, имамо да је $c \leq 6, b \leq 5$, па је $a+b+c+d+e \leq 3+5+6+7+9 = 30 < 31$. Значи, мора бити $d = 8$. Последња ситуација је могућа, нпр. за $a = 3, b = 4, c = 7, d = 8, e = 9$ или $a = 3, b = 5, c = 6, d = 8, e = 9$ (ово су једина решења).

Други разред – А категорија

1. Нека су a и b времена за која би се базен напунио првом, односно другом цеви, посебно. Из услова задатка је $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$ и $b=a+5$. Решавањем овог система добијамо $b=2$ или $b=15$, а како је $b=a+5>5$, мора бити $b=15$.

2. Четворка $(0,0,0,0)$ је решење овог система. Ако би постојало још једно решење, тада би постојало и решење за које је x^2+y^2 најмање. Како квадрати целих бројева при дељењу са 3 дају остатке 0 и 1, x^2+y^2 може бити дељиво са 3 само ако су x и y дељиви са 3, па је $x=3x_1, y=3y_1$, тј. $u^2+v^2=3(x_1^2+y_1^2)$, па како је $u^2+v^2=\frac{1}{3}(x^2+y^2)<(x^2+y^2)$, добијамо "мање" решење. Дакле, једино решење дате једначине је $(0,0,0,0)$.

3. За $x=0$ и $x=\frac{2\pi}{3}$ добијамо $a+b\leq 1$ и $-\frac{a}{2}+b\leq 1$, тј. $(a+b)+2(-\frac{a}{2}+b)\leq 1+2\cdot 1$, односно $b\leq 1$. За $x=\pi$ и $x=\frac{\pi}{3}$ добијамо $-a-b\leq 1$ и $\frac{a}{2}-b\leq 1$, односно $(-a-b)+2(\frac{a}{2}-b)\leq 1+2\cdot 1$, тј. $b\geq -1$, што је и требало доказати.

4. Четвороугао $CEDK$ је квадрат, па је $DK=DE$. Како су троуглови EAD и KDB правоугли, из Питагорине теореме добијамо : $AD^2+BD^2=AE^2+DE^2+BK^2+KD^2=$
$=AE^2+BK^2+2DE\cdot DK$. Са друге стране, $(AE+BK)^2=AE^2+BK^2+2AE\cdot BK$, па је довољно доказати да је $\frac{DE}{AE}=\frac{BK}{DK}$, што следи из сличности троуглова EAD и KDB.

5. Нека је F тачка за коју важи $D-C-F$ и $DC=CF$. Како је $DC=CF=CE$, то је $\measuredangle DEF=90^\circ$, па је $FE\perp DE$, односно $FE\perp AB$. Како је и $BE\perp AF$, то је E ортоцентар троугла AFB, па је $AE\perp FB$, тј. $DK\|CL\|FB$. Зато је (по Талесовој теореми): $\frac{KL}{LB}=\frac{DC}{CF}=1$, што је и требало доказати.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $x\leq y$. Тада важи $z>y$,$z>x$ и $x^n=z^n-y^n=(z-y)(z^{n-1}+z^{n-2}y+\cdots+zy^{n-2}+y^{n-1})>(z-y)nx^{n-1}\geq nx^{n-1}$, тј. $x\leq n$,па је $z>n$, што је супротно услову задатка.

2. Уведимо смену $X = 2^x, Y = y, Z = \arcsin z$. Овај систем постаје линеаран по X, Y, Z и његово решење је $X = a+1, Y = 5, Z = a+2$, па је полазни систем еквивалентан са $2^x = a+1, y = 5, \arcsin z = a+2$. Следи, ако $a \in (-\infty, -1] \cup (\frac{\pi}{2}-2, +\infty)$, систем нема решења, а ако $a \in (-1, \frac{\pi}{2}-2]$, постоји јединствено решење $x = \log_2(a+1), y = 5, z = \sin(a+2)$.

3. Како је $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ број 2002 се као производ природних бројева већих од 1 може приказати на следеће начине: $2 \cdot 1001$, $7 \cdot 286$, $11 \cdot 182$, $13 \cdot 154$ ($4 = \binom{4}{1}$ начина), $14 \cdot 143$, $22 \cdot 91$, $26 \cdot 77$, ($3 = \binom{4}{2}/2$ начина), $14 \cdot 11 \cdot 13$, $22 \cdot 7 \cdot 13$, $26 \cdot 7 \cdot 11$, $77 \cdot 2 \cdot 13$, $91 \cdot 2 \cdot 11$, $143 \cdot 2 \cdot 7$ ($6 = \binom{4}{2}$ начина) и $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ (1 начин). Свако од ових растављања одговара једном траженом преставављању (када се допуни потребним бројем јединица). Дакле, тражених представљања има $4+3+6+1 = 14$.

4. Нека је D пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC. Тада је $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ (особина симетрале угла). Из косинусне теореме примењене на троуглове ABD и ADC добијамо: $b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\frac{\alpha}{2} = DC^2$ и $c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\frac{\alpha}{2} = BD^2$, па ако прву једначину помножимо са c^2, а другу са b^2 и одузмемо их добијамо: $l_a^2(c^2 - b^2) = 2bcl_a \cos\frac{\alpha}{2}(c-b)$. Ако је $c \neq b$, добијамо $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{l_a}$, па по условима задатка следи $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, а пошто је α угао троугла, следи $\alpha = 120°$. Ако је $b = c$, из почетног услова добијамо $b = c = 2l_a$, па је $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, те је $\frac{\alpha}{2} = 60°$, односно $\alpha = 120°$ и у овом случају.

5. За сваки тангентни многоугао обима O, површине P и полупречника уписаног круга r важи $2P = r \cdot O$.Нека су P, O, r и $P_i, O_i, r_i, 1 \leq i \leq n$, површине, обими и полупречници уписаних кругова полазног многоугла, односно датих троуглова. Тада важи $O_i < O$, па је :

$$r_1 + \cdots + r_n = \frac{2P_1}{O_1} + \cdots + \frac{2P_n}{O_n} > \frac{2P_1}{O} + \cdots + \frac{2P_n}{O} = 2\frac{P_1 + \cdots + P_n}{O} = \frac{2P}{O} = r.$$

Четврти разред – А категорија

1. Без умањења општости можемо претпоставити да је $a \geq b \geq c$.У том случају је $a+b-c > 0$ и $a+c-b > 0$. Ако је $b+c-a \leq 0$, важи строга неједнакост. Иначе, дати изрази су позитивни, па је (по неједнакости између аритметичке и геометријске средине) :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) =$$

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \cdot \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \cdot \sqrt{(c+a-b)(b+c-a)} \leq$$

$$\leq \frac{a+b-c+b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b+a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b+b+c-a}{2} = abc,$$

што је требало доказати.

2. Полазна једначина је еквивалентна са једначином $x(x+1) = (y^2+1)(y^2+y)$. За $y=0$ добијамо $x=0$. За $y=1$, једначина $x(x+1)=4$ нема целе корене. За $y=2$, једначина $x(x+1)=5\cdot 6$ има позитиван корен $x=5$. За $y \geq 3$ важе неједнакости: $(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}) < (y^2+1)(y^2+y) < (y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1)$, па из $(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}) < x(x+1) < (y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1)$, следи $y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2} < x < y^2+\frac{y}{2}$. Како је, од бројева $y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}$ и $y^2+\frac{y}{2}$, један природан, а други облика (природан$-\frac{1}{2}$), последња једначина нема решења у скупу ненегативних целих бројева. Дакле, једина решења су $(0,0)$ и $(5,2)$.

3. Функција $f(x)=x^3-12x$ расте на интервалима $(-\infty,-2)$ и $(2,+\infty)$, опада на интервалу $(-2,2)$, има локални максимум за $x=-2, f(-2)=16$ и локални минимум за $x=2, f(2)=-16$. Ако је $a \leq b \leq -2$, тада је $f(a)-f(b) \leq 0$. Ако је $2 \leq a \leq b$, тада је $f(a)-f(b) \leq 0$. Ако је, $a \leq 2$ и $b \geq -2$, тада је $f(a) \leq f(-2)$ и $f(b) \geq f(2)$. Дакле, највећа разлика $f(a)-f(b)$, за $a \leq b$ се постиже за $a=-2$ и $b=2$. Следи $f(a)-f(b) \leq f(-2)-f(2) = 16-(-16) = 32$, одакле следи тврђење задатка.

4. Нека су D и E тачке на страници BC, такве да је $\measuredangle BAD = \measuredangle DAE = \measuredangle EAC$. Нека је $EC = x$ и $AE = y$. Из сличности троуглова AEC и BAC, добијамо:$\frac{c}{y} = \frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, односно $x = \frac{b^2}{a}, y = \frac{bc}{a}$. Троугалови ADC и ADB су једнакокраки, па је $DB = a-b$ и $AD = DB$, односно $AD = a-b, DE = b-x$. Из сличности троуглова BAE и ADE, добијамо $\frac{AB}{AD} = \frac{EB}{AE}$, односно $\frac{c}{a-b} = \frac{a-x}{y}$, одакле, убацивањем вредности за x и y, и сређивањем, добијамо тражени идентитет.

5. Видети решење 5. задатка за трећи разред А категорије.

Први разред – Б категорија

1. Како је $(n-2)^3+n^3+(n+2)^3=3n(n^2+8)$, закључујемо да је дати израз паран акко је n парно, а дељив са 9 увек (ако n није дељиво са 3, тада n^2 даје остатак 1 при дељењу са 3). Следи, дати израз није дељив са 18 акко је n непарно.

2. Видети решење 2. задатка за први разред А категорије.

3. Из тачке $(12,32)$, примењујући први корак, долазимо у тачку $(32,12)$, а ако затим два пута применимо други корак, долазимо у тачку $(8,12)$. У тачку $(7,12)$ не можемо доћи, јер се применом све три операције чува највећи заједнички делилац, тј. $NZD(m,n)=NZD(n,m)=NZD(m-n,n)=NZD(m+n,n)$.

4. Означимо са A скуп Планкова, са O скуп Плонкова, а са I скуп Плинкова. Први исказ говори да су скупови $I\backslash(A\cup O)$ и $(O\cap I)\backslash A$ празни, па у том случају други исказ значи да је скуп $A\cap O\cap I$ непразан. Значи, прво тврђење је тачно, треће није тачно, а друго може бити и тачно и нетачно, у зависности од тога да ли је скуп $(A\cap I)\backslash O$ непразан или празан.

5. Видети решење 5. задатка за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за други разред А категорије.

2. Ако уведемо смену $y=x-\frac{7}{2}$, добијамо једначину $112y^4-24y^2-1=0$, одакле је $y^2=\frac{1}{4}$ или $y^2=-\frac{1}{28}$, односно $y\in\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},i\sqrt{\frac{1}{28}},-i\sqrt{\frac{1}{28}}\}$, тј. $x\in\{3,4,\frac{7}{2}+i\sqrt{\frac{1}{28}},\frac{7}{2}-i\sqrt{\frac{1}{28}}\}$.

3. Како је $1=a^2+b^2+c^2=(\frac{1}{2}a^2+b^2)+(\frac{1}{2}a^2+c^2)$, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине, добијамо :

$$1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a^2b^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}a^2c^2} = \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ac,$$

($\sqrt{a^2} = a$ за $a \geq 0$), одакле је $a(b+c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Једнакост важи акко $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = c = \frac{1}{2}$.

4. Видети решење 4. задатка за други разред А категорије.

5. Како је $z = \left(\frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}\right)^n = (1+i)^n$, то је $z^2 = (2i)^n$, па је број z реалан акко је $z^2 \geq 0$, а то је тачно акко је број n дељив са 4.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако је $a = b$, дати паралелограм је ромб, па је тражена површина једнака 0, јер тада симетрале углова DAC и BCD садрже дијагоналу AC, а остале две симетрале садрже дијагоналу BD, па се све четири симетрале секу у једној тачки. Претпоставимо да је $a > b$ и нека је $\alpha = \measuredangle BAD$. Нека је M пресечна тачка симетрала из A и D, N пресечна тачка симетрала из D и C, P пресечна тачка симетрала из B и C, а Q пресечна тачка симетрала из A и B. Четвороугао $MNPQ$ је правоугаоник, јер је збир углова који належу на једну страницу паралелограма 180°, па се њихове симетрале секу под углом од 90°. Дакле, тражена површина је: $S = MN \cdot MQ = (DN - DM)(AQ - AM) = (a \sin\frac{\alpha}{2} - b \sin\frac{\alpha}{2})(a \cos\frac{\alpha}{2} - b \cos\frac{\alpha}{2}) = (a-b)^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$.

2. Дата једначина је дефинисана за $x > 0$. Тада
$4^{\log_{10} x} = 4^{\log_4 x \cdot \log_{10} 4} = x^{\log_{10} 4}$, па је $4^{\log_{10} x} = 16$, односно $\log_{10} x = 2$, тј. $x = 100$.

3. Нека су O_1, O_2 и O_3 центри датих лопти. Четвороугао $O_1O_2A_1A_2$ је правоугли трапез са висином A_1A_2, дужим краком $O_1O_2 = r_1 + r_2$ и основицама r_1 и r_2, па из Питагорине теореме добијамо $(r_1 + r_2)^2 = (A_1A_2)^2 + (r_2 - r_1)^2$, тј. $r_1r_2 = 4$. Слично добијамо да је $r_1r_3 = 9$ и $r_2r_3 = 16$. Множењем ове три једнакости добијамо $r_1r_2r_3 = 24$, односно $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = \frac{8}{3}$ и $r_3 = 6$.

4. Нека су α и β диедарски углови ивица AB и BC пирамиде. Како је $CS \perp ASB$ и $AS \perp BSC$, то је $P(ASB) = P(ABC)\cos\alpha$ и $P(BSC) = P(ABC)\cos\beta$, па је $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{P(ASB)}{P(BSC)} = \dfrac{P(AOB)\cos\beta}{P(BOC)\cos\alpha} = 4\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, одакле је $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2 = 4$, тј. $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 2$, односно $\dfrac{P(ASB)}{P(BSC)} = 2$.

5. Ако је мала казаљка прешла угао α, велика је за исто време прешла угао $360^\circ + \alpha$. Пошто се велика казаљка креће 12 пута брже, биће $360^\circ + \alpha = 12\alpha$, тј. $\alpha = \frac{360^\circ}{11} = 30^\circ + \frac{30^\circ}{11}$. Пошто мала казаљка за један сат пређе 30°, до преклапања казаљки пролази $\frac{12}{11}$ сата, тј. преклопиће се за један сат и $5\frac{5}{11}$ минута.

Четврти разред – Б категорија

1. Како је $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, где је $z = x+iy$, из дате једначине добијамо $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, односно, после сређивања, $(x+\frac{5}{3})^2 + y^2 = (\frac{4}{3})^2$. Дакле, то је круг са центром у тачки $(-\frac{5}{3}, 0)$ и полупречником $\frac{4}{3}$.

2. Нека је $7p+1 = n^2, n \in \mathbb{N}$. Следи: $7p = (n-1)(n+1)$, па како су сви природни делиоци броја $7p$ бројеви 1, 7, p и $7p$, то је $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$. Следи $n \in \{2,8,6,0\}$, па провером добијамо да је једино решење $n=6$, односно $p=5$.

3. Ако прву једначину помножимо са 2, а другу са -1 и саберемо их, добијамо:
$(y+1)(2x^2(1-y)+y^2-3y+3) = 0$. За $y=-1$ добијамо $x=1$. За $y \le 1$, израз у загради је строго већи од 0, а за $y \ge 1$, прва једначина датог система нема решења. Дакле, једино решење датог система је $(1,-1)$.

4. Докажимо дато тврђење математичком индукцијом. Како је

$$\frac{(a_1a_2)^2-(a_1a_0)^2}{4d} = a_1^2\frac{(a_2-a_0)(a_2+a_0)}{4d} = a_1^2\frac{2d\cdot 2a_1}{4d} = a_1^3,$$

то је тврђење тачно за $n=1$ (база индукције). Претпоставимо да је тврђење тачно за n. Тада је $a_1^3+\cdots+a_{n+1}^3 = \dfrac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d} + a_{n+1}^3 = \dfrac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2+4da_{n+1}^3}{4d} = \dfrac{a_{n+1}^2(a_n^2+4d(a_n+d))-(a_1a_0)^2}{4d} = \dfrac{a_{n+1}^2(a_n+2d)^2-(a_1a_0)^2}{4d} = \dfrac{(a_{n+1}a_{n+2})^2-(a_1a_0)^2}{4d}$, што је тражено тврђење за $n+1$.

5. Видети решење 5. задатка за трећи разред Б категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Како је $2^3 \equiv 1 (\operatorname{mod} 7)$ имамо следеће могућности :
ако је $k \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$, онда $2k-1 \equiv 2$, па $2^{2k-1}+2^k+1 \equiv 2^2+2^0+1 \equiv 6 (\operatorname{mod} 7)$;
ако је $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$, онда $2k-1 \equiv 1$, па $2^{2k-1}+2^k+1 \equiv 2^1+2^1+1 \equiv 5 (\operatorname{mod} 7)$;
ако је $k \equiv 2 (\operatorname{mod} 3)$, онда $2k-1 \equiv 0$, па $2^{2k-1}+2^k+1 \equiv 2^0+2^2+1 \equiv 6 (\operatorname{mod} 7)$.
Одавде следи тврђење задатка.

2. Сређивањем добијамо $(2m-n)^2+(n-3)^2 = 9$, одакле добијамо $(2m-n, n-3) \in \{(0,-3),(0,3), (3,0),(-3,0)\}$ што даје решења $(m,n) \in \{(0,0),(0,3),(3,3),(3,6)\}$.

3. Нека је $n \geq 2$ произвољан природан број , $a_1 \geq 3$ произвољан непаран број, а $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$ произвољни парни бројеви, такви да $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$. Тада је $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2 = 2k+1$, за неки природан број k. Ако изаберемо $a_n = k$, збир квадрата свих n бројева је $k^2+2k+1 = (k+1)^2$. Поред тога, $(a_{n-1}-1)^2 \geq (3-1)^2 > 2$, па је и $\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2+(a_{n-1}-1)^2 > 2$. Ова неједнакост је еквивалентна са $a_n = k = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 1\right) > a_{n-1}$, па су сви бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ међусобно различити.
Задатак можемо решити и применом математичке индукције. За $n = 2$, $3^2+4^2 = 5^2$. Претпоставимо да постоје $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, такви да је $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 = k^2$. Тада је $(5k)^2 = (5a_1)^2+(5a_2)^2+\cdots+(5a_n)^2 = (3a_1)^2+(4a_1)^2+(5a_2)^2+\cdots+(5a_n)^2$ и важи $3a_1 < 4a_1 < 5a_2 < \cdots < 5a_n$.

4. Нека је A_1 средиште странице BC, а T_0 тачка симетрична тежишту

T троугла ABC. Дужине страница троугла TT_0C су $\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}t_c$, а његова површина $\frac{P}{3}$, јер је $P(TT_0C) = P(TA_1C) + P(A_1T_0C)$, а површине троуглова TA_1C и A_1T_0C су $\frac{P}{6}$, пошто је $A_1C = \frac{BC}{2}$,а одговарајућа висина три пута краћа од висине која одговара страници BC троугла ABC (јер тежиште дели тежишну дуж у односу 2:1). Како је површина троугла мања или једнака од полупроизвода призвољне две његове странице, из троугла TT_0C добијамо $\frac{P}{3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}t_a \cdot \frac{2}{3}t_b$, односно $P \leq \frac{2}{3}t_a \cdot t_b$, што је тврђење задатка. Једнакост важи акко су у датом троуглу тежишне дужи које одговарају страницама BC и CA нормалне, односно акко за странице датог троугла важи $a^2 + b^2 = 5c^2$.

5. Анализа: нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и CA, редом. Означимо дату праву са p. Нека је D подножје нормале из A на BC, а D_1 подножје нормале из B_1 на BC. Важи $p \| B_1D_1$, $\measuredangle A_1D_1B_1 = \frac{\pi}{2}$ и B_1D_1 је средња линија троугла CDA.
Конструкција: У пресеку кружнице са пречником A_1B_1 и праве паралелном са p која садржи B_1 добијамо тачку D_1. У пресеку правих p и A_1D_1 добијамо тачку D. Тачка A се налази на правој p у истој полуравни одређеној правом A_1D_1 као и тачка B_1 и $AD = 2B_1D_1$. Тачку C добијамо у пресеку правих AB_1 и A_1D_1. Тачка B је тачка на правој A_1D_1 за коју важи $A_1C = A_1B$ различита од тачке C.
Доказ: Из конструкције следи да висина AD лежи на правој p и да је A_1 средиште дужи BC. По конструкцији, троуглови CDA и CA_1B_1 су слични, са коефицијентом сличности 2, па је B_1 средиште дужи CA.
Дискусија: Нема решења ако је $p \perp A_1B_1$ (иначе би права p била нормална и на BC и на AB) и ако права p садржи тачке A_1 и B_1 (иначе је $AB \perp BC$, па p садржи A_1, B_1, A и B). У осталим случајевима све конструкције су могуће и једнозначне, па постоји једно решење.

Други разред – А категорија

1. Величине под кореном морају бити ненегативне, па је $x \in [-3, \frac{1-\sqrt{109}}{6}] \cup [\frac{1+\sqrt{109}}{6}, +\infty)$. Нека је $u = \sqrt{x^2+x+1}, v = \sqrt{x+3}$, $w = \sqrt{6x^2-2x-18}$. Из полазне једначине добијамо систем $u + 2v = w, 6u^2 - 8v^2 = w^2$, тј. после елиминације w, $5u^2 - 4uv - 12v^2 = 0$. Како $x = -3$ није решење, следи $v \neq 0$, па добијамо $5\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 4\left(\frac{u}{v}\right) - 12 = 0$, односно $\frac{u}{v} = 2$ или $\frac{u}{v} = -\frac{6}{5}$. Друга могућност отпада, јер су $u, v \geq 0$, па је $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+3}} = 2$, односно $x^2 - 3x - 11 = 0$, тј. $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{53}}{2}$, што су и решења, јер припадају области дефинисаности корена.

2. Нека је $x_{ij} \in \{-1, 1\}$ број који се налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне таблице. Да би производ бројева у свакој од првих $m-1$ врста био једнак 1 потребно је и довољно да буде $x_{in} = \prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}$ (за $i = 1, 2, \ldots, m-1$). Да би производ бројева у свакој од првих $n-1$ колона био једнак -1 потребно је и довољно да буде $x_{mj} = -\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}$ (за $j = 1, 2, \ldots, n-1$). Да би производ бројева у m-тој врсти био једнак 1 потребно је и довољно да буде $x_{mn} = \displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} x_{mj} = \prod_{j=1}^{n-1}\left(-\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}\right) = (-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}$. Да би производ бројева у n-тој колони био једнак -1 потребно је и довољно да буде $x_{mn} = -\displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} x_{in} = -\prod_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}\right) = -\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}$. То је могуће само ако је $(-1)^{n-1} = -1$, тј. ако је n парно. У том случају се задовољавајуће попуњавање добија тако што се прво попуне поља која леже на пресецима првих $m-1$ врста и првих $n-1$ колона на произвољан начин, а затим се поља која леже у последњој врсти и последњој колони на једнозначан начин попуњавају кори7ћењем претходних формула. Зато се таблица може попунити на 0 начина уколико је n непарно и на $2^{(m-1)(n-1)}$ начина уколико је n парно.

3. Кружни исечак чији је угао 60° има дијаметар 1 (доказати). Дужина 1 се достиже за најудаљеније тачке на луку и за центар исечка и произвољну тачку на луку. Круг можемо потпуно прекрити са 6 оваквих исечака. Највише једна тачка лежи у центру круга, па од преосталих 7 можемо изабрати две које леже у истом исечку, а да нису најудаљеније тачке на луку. Њихово растојање је мање од 1. Одозго видимо да тврђење не мора важити за 7 тачака, ако једну поставимо у центар круга, а остале у темена правилног шестоугла уписаног у ову кружницу.

4. Нека је $A - B - C, AB = 2r, AC = 2R$, O_1 средиште AB, O_2 средиште BC, O_3 средиште AC, O центар кружнице k дате у задатку и x њен полупречник. Тада је $AO_3 = O_3C = r + R, O_1O_3 = AO_3 - AO_1 = R, O_2O_3 = CO_3 - CO_2 = r, O_1O = r + x, O_2O = R + x, O_3O = R + r - x$. Из површине троугла O_1OO_3 изражене преко Хероновог обрасца, односно преко полупроизвода странице и одговарајуће висине добијамо $\sqrt{(R+r)r(R-x)x} = \dfrac{1}{2}Rd$. Слично, из релација за површину троугла O_1OO_2 добијамо $\sqrt{(R+r+x)Rrx} = \dfrac{1}{2}(R+r)d$. Након квадрирања и одузимања ове две релације, добијамо $rx^2(2R+r) = \frac{1}{4}rd^2(2R+r)$, односно $x = \frac{d}{2}$.

5. Нека су t_a, t_b, t_c тежишне дужи које одговарају страницама a, b, c троугла ABC, редом. Тада је $4t_a^2 = 2c^2+2b^2-a^2, 4t_b^2 = 2c^2+2a^2-b^2, 4t_c^2 = 2a^2+2b^2-c^2$, па већој страници одговара мања тежишна дуж. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $a \leq b \leq c$. Тада је $\frac{t_a}{c} = \frac{t_b}{b} = \frac{t_c}{a} = k$, па коришћењем горњих једнакости имамо $4k^2(a^2+b^2+c^2) = 4(t_a^2+t_b^2+t_c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$, па како је $a^2+b^2+c^2 > 0$, следи $4k^2 = 3$, односно $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Трећи разред – А категорија

1. Ако је $p \leq 0$ функција $f(x) = x^3 - px + q$ је строго растућа, па дата једначина не може имати три реална решења. Ово смо могли добити и из Виетових правила : $x_1+x_2+x_3 = 0, x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = -p, x_1x_2x_3 = -q$, где су x_1, x_2, x_3 корени дате једначине, па је $0 < x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = 2p$, па је $p > 0$ (због $q \neq 0$ ниједан од x_1, x_2, x_3 није 0). Ако је $q > 0$ имамо $x_1x_2x_3 = -q < 0$, а како је $x_1+x_2+x_3 = 0$ међу бројевима x_1, x_2, x_3 су два позитивна и један негативан. Нека је $x_1 = r > 0, x_2 = s > 0, r \leq s$. Тада је $x_3 = -(r+s)$, па је $p = -rs + r(r+s) + s(r+s) = r^2 + rs + s^2 \geq 3r^2$, тј. $r \leq \sqrt{\frac{p}{3}}$. Такође $q = -rs\cdot(-(r+s)) = rs(r+s) \geq 2r^3$, тј. $r \leq \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Следи $r \leq \min\left(\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)$, одакле следи и тврђење задатка.

2. Због дефинисаности корена мора бити $x_i \in [-1, 1]$ за $i = 1, \ldots, 100$. Нека је $\overrightarrow{a_i} = (\sqrt{1+x_i}, \sqrt{1-x_i})$, $\overrightarrow{b} = \left(100\sqrt{1+\frac{1}{100}}, 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}\right)$. Систем се своди на $\sum_{i=1}^{100} \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{b}$. Како је $|\overrightarrow{b}| =$

$\sqrt{\left(100\sqrt{1+\frac{1}{100}}\right)^2+\left(100\sqrt{1-\frac{1}{100}}\right)^2}=100\sqrt{2}$ и $|\overrightarrow{a_i}|=$
$=\sqrt{(\sqrt{1+x_i})^2+(\sqrt{1-x_i})^2}=\sqrt{2}$, за $i=1,\ldots,100$, добијамо $|\sum_{i=1}^{100}\overrightarrow{a_i}|=\sum_{i=1}^{100}|\overrightarrow{a_i}|$, па важи једнакост у неједнакости троугла за векторе $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_{100}}$, тј. они су истосмерни (истог смера као и вектор $\overrightarrow{b}$). Ако је $k(\sqrt{1+x},\sqrt{1-x})=(\sqrt{1+y},\sqrt{1-y}), k\geq 0$, добијамо $k^2(1+x)=1+y, k^2(1-x)=1-y$, односно $k=1$, па су ови вектори истосмерни акко су једнаки (вектору $\frac{1}{100}\overrightarrow{b}$). Следи, једнакост важи акко је $\overrightarrow{a_1}=\cdots=\overrightarrow{a_{100}}$, односно акко је $x_1=\cdots=x_{100}=\frac{1}{100}$, па је ово једино решење система из задатка.

3. Претпоставимо да четвороугао $ABCD$ задовољава тражене услове и да је $AC=2BD$. Тада је $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AC\cdot BD\cos 45^\circ=BD^2\cdot\sqrt{2}$. Међутим, ова једнакост је немогућа, јер су $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(x_c-x_a,y_c-y_a)\cdot(x_d-x_b,y_d-y_b)=(x_c-x_a)(x_d-x_b)+(y_c-y_a)(y_d-y_b)$ и $BD^2=(x_d-x_b)^2+(y_d-y_b)^2$ цели бројеви, $BD^2\neq 0$, па би добили да је $\sqrt{2}$ рационалан број.

4. Нека је O центар датог круга, $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ угао између OP и тетиве дужине $t_1(\alpha)$, дужина друге тетиве $t_2(\alpha)$, S_1 и S_2 средишта ових тетива,а $S(\alpha)=t_1(\alpha)+t_2(\alpha)$. Тада је $\frac{t_1(\alpha)}{2}=\sqrt{R^2-OS_1^2}, \frac{t_2(\alpha)}{2}=\sqrt{R^2-OS_2^2}$, а како је $OS_1=d\sin\alpha, OS_2=d\cos\alpha$, добијамо $S(\alpha)=$
$=2\left(\sqrt{R^2-d^2\cos^2\alpha}+\sqrt{R^2-d^2\sin^2\alpha}\right)$, тј.

$$(S(\alpha))^2=4\left(2R^2-d^2+2\sqrt{R^4-R^2d^2+\frac{d^4}{4}\sin^2 2\alpha}\right).$$

Овај израз је најмањи кад је $\sin 2\alpha=0$, тј. кад је $\alpha\in\{0,\frac{\pi}{2}\}$, односно кад једна од тетива пролази кроз центар круга и тада збир тетива износи $S(\alpha)=2(\sqrt{R^2-d^2}+R)$. Овај израз је највећи кад је $\sin 2\alpha=1$, тј. кад је $\alpha=\frac{\pi}{4}$, односно кад тетиве граде угао $\frac{\pi}{4}$ са OP и тада збир тетива износи $S(\alpha)=4\sqrt{R^2-\frac{d^2}{2}}$.

5. Докажимо индукцијом да је $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}n$ пута <2003. За $n=1$ ово је тачно, јер је $a=\sqrt[2003]{2003}<2003$. Претпоставимо да је тврђење тачно за неко природно n. Нека је $b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \Big\} n$ пута. Тада је $b < 2003$, па је $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}} \Big\} n+1$ пута $= a^b < a^{2003} = 2003$. За $n = 2003$ добијамо тврђење задатка.

Четврти разред – А категорија

1. Систем је еквивалентан систему у коме је друга једначина помножена са 4, тј. $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 5, 4x^3y + 4xy^3 = 4$, па и систему који се састоји од збира ове две једначине и разлике ове две једначине, тј. $(x+y)^4 = 9, (x-y)^4 = 1$. Из ових једначина добијамо $x = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{3} + \beta}{2}, y = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{3} - \beta}{2}$, где су $\alpha, \beta \in \{1, -1, i, -i\}$, тј. 16 решења. Потребно је још видети да су ово различита решења. Међутим, ако би било $\dfrac{\alpha_1 \cdot \sqrt{3} + \beta_1}{2} = \dfrac{\alpha_2 \cdot \sqrt{3} + \beta_2}{2}$ имали би $(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{3} = (\beta_2 - \beta_1)$, па ако је $\alpha_1 = \alpha_2$ имамо $\beta_1 = \beta_2$, тј. исто решење, а иначе $\sqrt{3}$ можемо прецтавити у облику $r + is$, где су $r, s \in \mathbb{Q}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{3}$ реалан и ирационалан број.

2. Како је $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n - 1 = \left(1 + n \cdot \frac{1}{2n} + \binom{n}{2}\frac{1}{(2n)^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3} + \dots\right) - \left(1 - n \cdot \frac{1}{2n} + \binom{n}{2}\frac{1}{(2n)^2} - \binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3} + \dots\right) - 1 = 2\left(\binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3}\binom{n}{5}\frac{1}{(2n)^5} + \dots\right) > 0$. Множењем са $(2n)^n$ добија се тражена неједнакост. Једнакост важи акко $n = 1$ или $n = 2$.

3. Нека је $b_n = ka_n - a_{n-2}$ за $n \geq 3$ и нека је $(b_{n+2}, b_{n+3}) = d$. Тада је $b_{n+2} - b_{n+1} = b_n$ дељиво са d, па је и $b_{n+1} - b_n = b_{n-1}$ дељиво са d. Настављањем овог поступка, добијамо да су $b_4 = 3k + 1$ и $b_3 = 2k + 1$ дељиви са d. Како је $3b_3 - 2b_4 = 1$, то је $(b_3, b_4) = 1$, па је $d = 1$.

4. За целе бројеве m и n и полином са целобројним коефицијентима P важи $(m - n) \mid (P(m) - P(n))$. Нека је $l \in \mathbb{Z}$ целобројна нула полинома P. Тада постоје $k, r \in \mathbb{Z}$, такви да је $l = kn + r$, па : $n \mid kn \mid (r - l) \mid (P(r) - P(l)) = P(r)$, што је немогуће, јер је $0 < |P(r)| < n$.

5. Нека је S врх пирамиде, $ABCD$ његова основа и E подножје нормале из S на $ABCD$. Троугао SEA је правоугли, а хипотенуза му је $AS = 1$. Нека је $\measuredangle SAE = \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тада је $SE = \sin\alpha$ висина пирамиде, а $2AE = 2\cos\alpha$ дијагонала квадрата у основи, па је запремина пирамиде $V(\alpha) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(2AE)^2}{2}SE = \dfrac{2}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha$. Тада је $V'(\alpha) = \dfrac{2}{3}\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) = \dfrac{2}{3}\cos\alpha(1 - 3\sin^2\alpha)$, па је $V'(\alpha) > 0$, за $0 < \sin\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $V'(\alpha) < 0$ за $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sin\alpha < 1$ (α је оштар угао) , тј. максимум се достиже за $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и износи $V = \frac{4}{27}\sqrt{3}$.

Први разред – Б категорија

1. Сређивањем добијамо $8n^3 - 12n^2 + 6n + 63 = (8n^3 - 12n^2 + 6n - 1) + (63 + 1) = (2n - 1)^3 + 4^3 = (2n + 3)((2n - 1)^2 - 4(2n - 1) + 16) = (2n+3)((2n-1)^2 - 4(2n-1) + 4 + 12) = (2n+3)((2n-3)^2 + 12)$, па је дати број производ два природна броја већа од 1, тј. сложен је.

2. Из $AB - CD = AD - BC$ и $AB + CD = AD + BC$ (четвороугао је тангентни), добија се $AB = AD$ и $BC = CD$, па су троуглови ABC и ADC подударни (подударне су им све три странице). Тада је $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ADC) = 90^\circ$ (јер је четвороугао тетивни), па је AC пречник круга.

3. Нека је $3n - m = k \cdot p, 5n + 2m = k \cdot s, (p, s) = 1, k > 1$ за природне p, s и k. Одавде се добија $n = \dfrac{k(2p + s)}{11}$ и $m = \dfrac{k(3s - 5p)}{11}$. Како су m и n узајамно прости, то је $k = 11$.

4. Како дато тврђење важи за свако $x \in \mathbb{R}$, важи и за $x = 0$ и $x = 1$. За $x = 0$ добијамо $f(0) - (f(0))^2 \geq \dfrac{1}{4}$, односно $\left(f(0) - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$, одакле је $f(0) = \frac{1}{2}$. За $x = 1$ добијамо $f(1) - (f(1))^2 \geq \dfrac{1}{4}$, односно $\left(f(1) - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$, одакле је $f(1) = \frac{1}{2}$. Следи $f(0) = f(1)$, тј. дата функција није инјективна.

5. Сваки пар правих првог скупа и сваки пар правих другог скупа одређују тачно један паралелограм и обрнуто. Пар правих из првог скупа можемо изабрати на $\binom{13}{2}$ начина, а из другог на $\binom{7}{2}$ начина, па тражених паралелограма има $\binom{13}{2} \cdot \binom{7}{2} = 1638$.

Други разред – Б категорија

1. Како за $n+1 \leq k \leq n^2-1, k \in \mathbb{N}$ важи $\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{n^2}$, добија се $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n^2-n}{n^2} = 1$, што је требало доказати.

2. Дати изрази су дефинисани за $z \neq 0$. Из $|z| = |\frac{1}{z}|$ следи $|z| = 1$, а из $|z| = |z-1|$ следи $|z-1| = 1$. Ако је $z = x+iy$, из ових услова добијамо $x^2+y^2 = 1$ и $(x-1)^2+y^2 = 1$, односно $x^2 = (x-1)^2$, па је $x = \frac{1}{2}$, а $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Дакле, решења су $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Како је $a \neq 1$, једначина је квадратна, па из Виетових правила добијамо : $(x_1-b)(x_2-b) = x_1x_2 - b(x_1+x_2) + b^2 = \frac{2a-1}{a-1} - b\frac{a+1}{a-1} + b^2 = b^2 - b + 2 + \frac{1-2b}{a-1}$, па дати израз не зависи од a акко је $b = \frac{1}{2}$.

4. Дата једначина је дефинисана за $x \geq 1$. Нека је $u = \sqrt[3]{2-x}, v = \sqrt{x-1}$. Из $v = 1-u, u^3+v^2 = 1$, добија се $u(u-1)(u+2) = 0$, одакле $u \in \{0, 1, -2\}$, тј. $x \in \{2, 1, 10\}$, па како су сви добијени бројеви не мањи од 1, усвајамо сва три решења.

5. Из једнакости $AD^2 = BD \cdot CD$ добијамо да је $AD = 6$ и $DE = 3$, а из правоуглог троугла BED добијамо $BE = 5$. Нека је G тачка на страници AC таква да је $DG \| BF$. Пошто је EF средња линија троугла ADG, из $EF = x$ следи $DG = 2x$. Из сличности троуглова BFC и DGC следи једнакост $\frac{5+x}{2x} = \frac{13}{9}$, одакле је $x = \frac{45}{17}$, односно $BF = \frac{130}{17}$.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $AB = a, CD = b, BC = x, AD = h, AD \perp AB$. Како је $x + h =$

$a+b$(трапез је тангентан), из $x^2-h^2=(a-b)^2$ се добија $(x-h)(a+b)=(a-b)^2$, тј. $x=\frac{(a-b)^2}{a+b}+h$, одакле је $h=a+b-x=\frac{1}{2}(a+b-\frac{(a-b)^2}{a+b})=\frac{2ab}{a+b}$, па је $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=ab$.

2. Нека је O центар лопте описане око пирамиде $SABCD$, R њен полупречник, E средиште правоугаоника $ABCD$ и M средиште ивице CS. Троугао SCE је правоугли са оштрим углом $\beta=\measuredangle SCE$, а тачка O је једнако удаљена од тачака C и S, па је $OM\perp CS$ и $R=OS=\dfrac{SM}{\sin\beta}=\dfrac{1}{2}\dfrac{CE}{\cos\beta\sin\beta}=\dfrac{d}{2\sin 2\beta}$, јер је $\measuredangle SOM=\measuredangle SCE=\beta$ (углови са нормалним крацима).

3. Због дефинисаности логаритма мора бити $x\in(-\infty,2-\sqrt{5})\cup(2+\sqrt{5},+\infty)$. Из $\log_2(x^2-4x-1)=n, n\in\mathbb{Z}$, следи $x=2\pm\sqrt{5+2^n}$. Пошто је $x\in\mathbb{Z}$, добијамо $5+2^n=k^2, k\in\mathbb{Z}$. Ако је $n<0$, важи $2^{-n}(k^2-5)=1$, што је немогуће, јер је $2^{-n}(k^2-5)=1$ паран број. Ако је $n=0$, добијамо $k^2=6$, што је немогуће ($k\in\mathbb{Z}$). Ако је $n>0$, број $5+2^n$ је непаран, па је $k=2m-1$, за неко $m\in\mathbb{Z}$, одакле сређивањем добијамо $m(m-1)=2^{n-2}+1$. За $n=1$ број $2^{n-2}+1$ није цео, за $n>2$ број $2^{n-2}+1$ је непаран, а број $m(m-1)$ је паран цео број, па су и ове ситуације немогуће. За $n=2$ добијамо $x^2-4x-5=0$, тј. $x\in\{-1,5\}$, што су једина решења (припадају области дефинисаности логаритма).

4. Тригонометријским трансформацијама добијамо : $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ\sin 80^\circ-\cos 60^\circ\sin 80^\circ)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-\frac{1}{2}\sin 80^\circ)=\frac{1}{4}((\sin 100^\circ-\sin 80^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{8}$, што је требало доказати.

5. Како је $p\geq 0$, за $k>0$ важи $kp\geq 0$, па је $2003^{kp}\geq 1$ и $1-2003^{kp}\leq 0$, одакле је $(2003^{kp})^{1-2003^{kp}}\leq 1$. Сабирањем ових неједнакости за $k=1,\ldots,2003$, добијамо $(2003^p)^{1-2003^p}+(2003^{2p})^{1-2003^{2p}}+\cdots+(2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}}\leq 2003$, што је и требало доказати. Једнакост важи акко $p=0$.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је $a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$. Тада је $\left(1-\frac{1}{2}\right)a_n = 1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}$, одакле је $a_n = 2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2. Нека је $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$. Тада је $y = \pm\sqrt{\frac{4y-1}{y-1}}$, тј. мора бити $\frac{4y-1}{y-1} \geq 0$, односно $y \in (-\infty, \frac{1}{4}] \cup (1, +\infty)$, што је и требало доказати.

3. Израз $\frac{a_1+\cdots+a_n}{a_{n+1}+\cdots+a_{3n}} = \frac{2a_1+(n-1)d}{2(2a_1+2nd+(2n-1)d)}$ не зависи од n акко је $2a_1+(n-1)d = c(2a_1+2nd+(2n-1)d)$, тј. $(1-4c)dn = (2a_1-d)(c-1)$. Последња једнакост је испуњена за све n акко је $d(1-4c) = 0$ и $(2a_1-d)(c-1) = 0$. Ако је $d = 0$, мора бити $a_1 \neq 0$ (да не би имали дељење нулом) и $c = 1$, тј. то је низ $a_n = a \neq 0$ за свако n (за овакав низ немамо дељење нулом). Ако је $c = \frac{1}{4}$, биће $d = 2a_1$, па добијамо решења $a_n = (2n-1)a, a \neq 0$ за свако n (опет да не би имали дељење нулом). Ово су сва решења.

4. Ако су сва три решења реална, по Виетовим правилима имамо $x_1x_2x_3 = \frac{1}{a} > 0$, па је само једно позитивно, јер по Виетовим правилима имамо и $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 0$, тј. не могу бити сва три позитивна. Ако је само једно решење реално (нпр. x_1), тада за друга два важи $x_2 = \overline{x_3}$, па је $x_1x_2x_3 = x_1|x_2|^2 = \frac{1}{a} > 0$, тј. опет је $x_1 > 0$.

5. Нека је r полупречник основе, а H висина ваљка. У пресеку ваљка и равни која садржи његову осу добијамо правоугаоник страница H и $2r$, а дијагонале $2\sqrt{3}$. Тада је $V(H) = r^2\pi H = ((\sqrt{3})^2 - (\frac{H}{2})^2)\pi H, 0 < H < 2\sqrt{3}$, па је $V'(H) = 3\pi(1-\frac{H^2}{4})$. Следи : $V'(H) > 0$, за $0 < H < 2$ и $V'(H) < 0$, за $2 < H < 2\sqrt{3}$, тј. максималну запремину добијамо ако упишемо ваљак висине $H = 2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Нека је $x = 1 + t, 0 \leqslant t \leqslant 1$. Тада је $y = 1 - t$, а $x^2y^2(x^2 + y^2) = (1+t)^2(1-t)^2((1+t)^2 + (1-t)^2) = (1-t^2)^2(2+2t^2) = 2(1-t^4)(1-t^2) \leqslant 2$, јер је $0 \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$ и $0 \leqslant 1-t^4 \leqslant 1$. Једнакост важи акко $1-t^2 = 1-t^4 = 1$, односно акко $t = 0$, тј. акко $x = y = 1$.

2. Претпоставимо да се пермутацијама цифара броја $K = 2^k$ добио број $N = 2^n, n > k$. Тада је $N > K$, па пошто N има највише онолико цифара колико има и K, N и K имају исти број цифара, па је $N < 10K$. Даље, $N - K$ је дељив са 9, пошто оба броја дају исти остатак при дељењу са 9 као и збир њихових цифара. Следи $9 \mid N-K = 2^k(2^{n-k}-1)$, односно $9 \mid 2^{n-k} - 1 < 2^{n-k} = \frac{N}{K} < 10$. То значи $2^{n-k} - 1 = 9$, што је немогуће.

3. У датом скупу постоји особа која је примила макар 10 писама (иначе би број примљених писама био мањи од $9 \cdot 20 = 180$, а тај број мора бити једнак броју послатих писама, који је $10 \cdot 20 = 200$). Та особа је послала 10 писама неким од преосталих 19 особа, а примила макар 10 писама од истих 19 особа. Ако не би дошло до преклапања, поред уочене особе било би још $10+10 = 20 > 19$ особа. Следи да је та особа примила писмо од особе која јој је и послала писмо, што је и требало доказати.

4. Нека је S центар уписане кружнице, A_1 средиште странице BC, а α, β и γ углови код темена A, B и C троугла ABC. Како је $AM = AN$ то је $\measuredangle AMN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тачке B, S и P су колинеарне, па добијамо $\measuredangle NPS = 180^\circ - \measuredangle PBM - \measuredangle PMB = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\gamma}{2} = \measuredangle NCS$. Следи да тачке S, C, P и N припадају једној кружници, па је $\measuredangle CPB = \measuredangle CPS = \measuredangle CNS = 90^\circ$. Дакле PA_1 је тежишна линија правоуглог троугла BCP, па је $\measuredangle A_1PB = \measuredangle A_1BP = \measuredangle ABP$, тј. $AB \| A_1P$, што значи да P припада средњој линији троугла ABC. Троугао ABP има заједничку страницу са троуглом ABC, а одговарајућа висина му је, по претходно доказаном, два пута мања, одакле следи тврђење задатка.

5. Нека је $AC_1 : C_1B = k, BA_1 : A_1C = l$ и $CB_1 : B_1A = m$. Тада је $3\overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TB_1} + \overrightarrow{TC_1} = (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CC_1}) =$

$(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC})+(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})=\overrightarrow{0}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{l}{l+1}\overrightarrow{BC}+\frac{m}{m+1}\overrightarrow{CA}=\left(\frac{k}{k+1}-\frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{l}{l+1}-\frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{BC}$. Ако је $T\equiv T_1$, из линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ следи $\frac{k}{k+1}-\frac{m}{m+1}=\frac{l}{l+1}-\frac{m}{m+1}=0$, односно $k=l=m$. Обрнуто, ако је $k=l=m$, следи $\overrightarrow{TT_1}=\overrightarrow{0}$ тј. $T\equiv T_1$.

Други разред – А категорија

1. Нека је α заједничко решење датих квадратних једначина. Следи $0=\alpha(a\alpha^2+b\alpha+c)-(b\alpha^2+c\alpha+a)=a(\alpha^3-1)$, па пошто је $a\neq 0$, добијамо да је $\alpha^3=1$. Ако је $\alpha=1$, добијамо $a+b+c=0$, па из идентитета $a^3+b^3+c^3=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$ следи да је $a^3+b^3+c^3=3abc$. Ако је α комплексан корен једначине $\alpha^3=1$, онда је и $\overline{\alpha}$ заједничко решење датих квадратних једначина, па су ове једначине еквивалентне. Одавде је $a:b=b:c=c:a$, па је $a=b=c$, одакле и $a^3+b^3+c^3=3abc$. Обрнуто, ако је $a^3+b^3+c^3=3abc$ на основу горњег идентитета добијамо да је $a=b=c$ или $a+b+c=0$. У првом случају дате једначине су идентичне, а у другом заједничко решење им је 1. Овим је доказано тврђење задатка.

2. Претпоставимо супротно, тј. да постоје $t_1,t_2\in T$ са $t_1t_2=u\in U$ и $u_1,u_2\in U$ са $u_1u_2=t\in T$. Тада је $t_1t_2u_1u_2=uu_1u_2\in U$ и $t_1t_2u_1u_2=t_1t_2t\in T$ што је контрадикција.

3. По неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо: $(a+3b)(b+4c)(c+2a)=(a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a)\geqslant 4\cdot(ab^3)^{\frac{1}{4}}\cdot 5\cdot(bc^4)^{\frac{1}{5}}\cdot(ca^2)^{\frac{1}{3}}=60\cdot a^{\frac{11}{12}}\cdot b^{\frac{19}{20}}\cdot c^{\frac{17}{15}}$. Како је $a\leqslant b\leqslant c$, даље је $60\cdot a^{\frac{11}{12}}\cdot b^{\frac{19}{20}}\cdot c^{\frac{17}{15}}\geqslant 60\cdot a^{\frac{11}{12}}\cdot b^{\frac{13}{12}}\cdot c\geqslant 60abc$. У првој неједнакости једнакост важи акко $a=b=c$, у другој акко $b=c$, а у трећој акко $a=b$. Дакле, једнакост важи акко $a=b=c$.

4. Могуће је. Нека су темена датог троугла A,B и C_0, K и L тачке на AB, такве да је $AK=KL=LB=1$, k и l праве које садрже K и L редом, нормалне на AB, а C_1 пресек праве l и BC_0. Нека је C_n низ тачака дефинисан са $\{C_{2n}\}=k\cap AC_{2n-1},\{C_{2n+1}\}=l\cap BC_{2n}$, за $n\geqslant 1$. Троуглови $AC_{2n}C_{2n+1}$ за $0\leqslant n\leqslant 1000$, $BC_{2n-1}C_{2n}$ за $1\leqslant n\leqslant 1001$ и ABC_{2002} дају тражено разбијање(за $i>0$ $C_iC_{i+1}>KL=1$, $AC_{2i}>AK=1,BC_{2i+1}>BL=1,AC_{2i+1}>AL=2,BC_{2i}>BK=2$).

5. Како је Z средиште дужи PX, из правила паралелограма закључујемо да је $4XZ^2 + 4OZ^2 = 2OX^2 + 2OP^2$. При условима задатка, важи $OX = OQ + QX$, $QX^2 = XZ \cdot XP = 2XZ^2$ и $OP = OQ$. Добијамо: $2XZ^2 + 2OZ^2 = OQ^2 + 2OQ \cdot QX + QX^2 + OP^2 = 2OQ^2 + 2OQ \cdot QX + 2XZ^2 \Rightarrow OZ^2 = OQ \cdot (OQ + QX) = OQ \cdot OX \Rightarrow \Delta OQZ \sim \Delta OZX \Rightarrow \measuredangle OZQ \cong \measuredangle OXZ$, међутим, и $\measuredangle OZQ \cong \measuredangle OQY$ (угао између тангенте и тетиве круга) $\Rightarrow \measuredangle OQY \cong \measuredangle OXZ \Rightarrow YQ \| PX$.

Трећи разред – А категорија

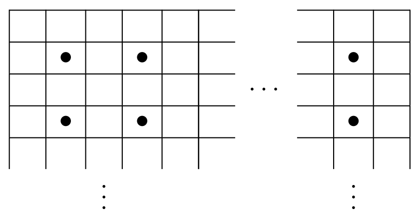
1. Претпоставимо да постоји низ $a_n, n \geqslant 1$ са датим својством. Тада је низ $b_n = \frac{1}{a_n}$, на основу услова задатка, аритметичка прогресија, па за неко $d \neq 0$ важи $b_n = b_1 + (n-1)d$, за свако природно n, па је за довољно велико n, b_n или већи од 1 или мањи од 0. Са друге стране, како су бројеви a_n природни, мора бити $0 < b_n \leqslant 1$, што је контрадикција.
Коначан низ оваквих бројева постоји. У случају 2003 броја можемо узети нпр. $a_n = \frac{2003!}{n}$, за $1 \leqslant n \leqslant 2003$. Лако се проверава да овај низ задовољава услове задатка.

2. Нека је q прост делилац броја $2^p - 1$ (тј. $2^p \equiv 1(\mod q)$) и нека је d најмањи природан број, такав да је $2^d \equiv 1(\mod q)$. Тада $d \mid p$, па је $d = 1$ или $d = p$. Због $2^d \equiv 1(\mod q)$, мора бити $d = p$. Из $2^{q-1} \equiv 1(\mod q)$ следи $p = d \mid q-1$. Како је q непаран, $q-1$ је дељиво и са 2. Следи да је $q = 2kp+1$, за неко природно k. Како је производ неколико бројева облика $2kp + 1, k \in \mathbb{N}$ број истог облика, а сваки делилац природног броја производ његових простих делилаца, добијамо тврђење задатка.

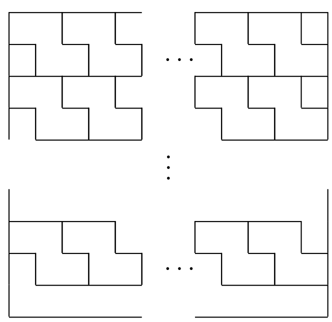
3. Нека је γ угао троугла код темена C, R полупречник описане кружнице, а a, b и c странице BC, CA и AB, редом, троугла ABC. Тада је $CC_1^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$,$OC_1 = R\cos\gamma$ и $c = 2R\sin\gamma$. Ако је OT нормално на CC_1, пошто T дели CC_1 у односу $2:1$, добијамо $R^2 = OT^2 + \frac{4CC_1^2}{9}$ и $R^2\cos^2\gamma = OT^2 + \frac{CC_1^2}{9}$, одакле одузимањем $R^2\sin^2\gamma = \frac{CC_1^2}{3}$, односно $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$, тј. $2c^2 = a^2 + b^2$. Обрнуто, нека је X пројекција тачке O на CC_1 и $C_1X : CC_1 = k$. Тада је $R^2 = OX^2 + (1-k)^2 CC_1^2, R^2\cos^2\gamma = OX^2 + k^2 CC_1^2$, одакле одузимањем $\frac{c^2}{4} = R^2\sin^2\gamma = (1-2k)\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = (1-2k)\frac{3c^2}{4}$, тј. $k = \frac{1}{3}$, односно $X \equiv T$.

4. За $n = 3$ тврђење је уствари неједнакост између аритметичке и геометријске средине. За $n > 3$, због датог поретка, важи $a_1a_2 \geqslant a_ka_{k+1}$, за $1 \leqslant k \leqslant n-2$, па је $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots + a_1a_2a_n = a_1a_2(a_3 + a_4 + \ldots + a_n) \leqslant \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}\right)^3$. Једнакост на првом месту важи акко $a_1 = a_2 = a_k = a_{k+1}$ или $a_{k+2} = 0$, а на другом акко $a_1 = a_2 = a_3 + \ldots + a_n$, тј. акко $a_1 = a_2 = a_3$ и $a_4 = \ldots = a_n = 0$.

5. Уочимо означена поља на следећој слици.



Свака фигура заузима тачно једно означено поље. Како је број означених поља једнак $\left[\frac{2003}{2}\right] \cdot \left[\frac{2003}{2}\right] = 1002001$, на таблу се може поставити највише 1002001 фигуре. На таблу је могуће поставити 1002001 фигура, на пример, као на следећој слици.



Четврти разред – А категорија

1. Означимо димензије паралелепипеда са a, b и c. Тада је $abc = V, 2(ab + bc + ca) = 18, a + b + c = 6$. Задатак се своди на: за које $V > 0$ овај систем једначина има решења која задовољавају $a > 0, b > 0, c > 0$. Према Виетовим формулама, a, b и c, су решења једначине $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - V = 0$. Треба одредити када овај полином има 3 (не обавезно различита) позитивна реална корена. Посматрајући облик кубне криве, закључујемо да је то еквивалентно следећим условима: $f(0) < 0$, локални екстремуми се достижу у позитивним тачкама, локални максимум је ненегативан и локални минимум је непозитиван. Како је $V > 0$, имамо $f(0) = -V < 0$. Локални екстремуми се достижу у коренима извода $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = 3$. Видимо да је локални максимум достигнут за $x = 1$ и има вредност $f(1) = 4 - V$, а локални минимум је достигнут у $x = 3$ и има вредност $f(3) = -V$. Због тога су сви услови испуњени када је $0 < V \leqslant 4$. Једноставно се проверава да постоје три различита корена за $V < 4$ и два различита корена за $V = 4$.

2. Видети решење 2. задатка за трећи разред А категорије.

3. Видети решење 3. задатка за трећи разред А категорије.

4. Видети решење 4. задатка за трећи разред А категорије.

5. Означимо са a_n број области на колико је круг подељен уколико је дато n тачака. Лако се види да је $a_2 = 2$. Додавањем нове дужи(када се дода нова тачка) добија се $m+1$ нова област, где је m број дужи које се секу унутар круга са придодатом дужи, који је иначе једнак pq, где p и q представљају број тачака на кружници које се налазе са једне стране придодате дужи. Дакле, за број нових области важи $a_{n+1} = a_n + \sum_{k=1}^{n}((k-1)(n-k)+1)$, одакле(користећи $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$) добијамо $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{6}n(n^2-3n+8)$, односно $a_n = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.

Први разред – Б категорија

1. Како је $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 = x^2+2x(y+1)+(y+1)^2-(y+1)^2+3y^2+6y+4 = (x+y+1)^2+2y^2+4y+3 = (x+y+1)^2+2(y+1)^2+1 \geqslant 0+0+1 = 1$, добијамо тврђење задатка. Једнакост важи акко $x+y+1 = y+1 = 0$, односно акко $x = 0, y = -1$.

2. Из $\overline{x_1x_2\ldots x_n}\cdot 4=\overline{x_nx_{n-1}\ldots x_1}$ закључујемо $x_1\leqslant 2$, па због дељивости са 4, мора бити $x_1=2$. Из $\overline{2x_2\ldots x_n}\cdot 4=\overline{x_nx_{n-1}\ldots 2}$, следи $x_n\geqslant 8$, па мора да буде $x_n=8$. Како је $4\cdot 23>90$, мора бити $x_2\in\{0,1,2\}$, па због дељивости са 4 мора бити $x_2=1$. За троцифрени број 218 не важи $218\cdot 4=812$, па најмањи такав број потражимо међу четвороцифреним бројевима. Из једнакости $\overline{21x_38}\cdot 4=\overline{8x_312}$, добијамо $x_3=7$. Дакле, тражени број је 2178.

3. Видети решење 3. задатка за први разред А категорије.

4. После сређивања добијамо: $\dfrac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}=$
$=\dfrac{(xy+xz+zy+z^2)(xy+xu+yu+u^2)}{(x+y+z+u)^2}=$
$=\dfrac{(zu+xz+zy+z^2)(zu+xu+yu+u^2)}{(x+y+z+u)^2}=$
$=\dfrac{z(x+y+z+u)\cdot u(x+y+z+u)}{(x+y+z+u)^2}=z\cdot u$, па како је $z,u>1$, следи тврђење задатка.

5. При условима задатка је F ортоцентар троугла ABE(или је E ортоцентар троугла ABF-претпоставимо да је прва ситуација), па је $EF\perp AB$. Из $\measuredangle CSD=90^\circ$, следи $\measuredangle CAD=45^\circ$, па је троугао ACF једнакокрако-правоугли и $AC=CF$. Како важи $\measuredangle ECF=\measuredangle BCA=90^\circ$ и $\measuredangle EFC=\measuredangle BAC$(углови са нормалним крацима), па су троуглови ECF и BCA подударни, одакле је $EF=AB$.

Други разред – Б категорија

1. Дата једначина има смисла за $x\neq 1$ и $x\neq 3$. Нека је $t=\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$. Тада је $(3-x)t^2-2t+(x-1)=0$, одакле је $t=1$ или $t=\frac{x-1}{3-x}$. У првој ситуацији добијамо $x=2$, а у другој $\left(\frac{3-x}{x-1}\right)^4=1$, односно или $\frac{3-x}{x-1}=1$, тј. $x=2$ или $\frac{3-x}{x-1}=-1$, што нема решења. Дакле, једино решење једначине је $x=2$.

2. Видети решење 2. задатка за други разред А категорије.

3. Ако је $x_1, x_2 \in (0,1)$, биће $\frac{2c+b}{a} = 2 \cdot \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = 2x_1x_2 - x_1 - x_2 = x_1x_2 - x_1 + x_1x_2 - x_2 = x_1(x_2-1) + x_2(x_1-1) < 0$, па је и $a(2c+b) < 0$.

4. Нека је дати квадрат $ABCD$ такав да су тачке C и D на кружници, а тачке E и F пресек нормале из центра круга са CD и AB редом. Нека је R полупречник кружнице, O центар кружнице, а $2x$ страница квадрата. Тада је $OE^2 = R^2 - x^2, OF = \frac{R}{2}$(јер је угао одсечка $120°$), $2x = EF = OE - OF = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R}{2}$, одакле добијамо $x = \dfrac{R(-2+\sqrt{19})}{10}$(друго решење квадратне једначине отпада, јер је негативно), па је $x = \frac{3}{2}$, одакле је страница квадрата 3.

5. Како је $\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16} = \sqrt[6]{(\sqrt{5}+1)^3} = \sqrt{\sqrt{5}+1}$, то је тражени број $2 \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} = 4$.

Трећи разред – Б категорија

1. Из правоуглих троуглова ASB и SBC, добијамо $AS = CS = \sqrt{a^2 - b^2}$, па је $V = V(SABC) = \frac{1}{3}BS \cdot P(ASC) = \frac{b}{6}(a^2 - b^2)$. Нека је D подножје висине из B на основицу AC једнакокраког троугла ABC. Тада је $AC = \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{2}, BD^2 = a^2 - (\sqrt{a^2-b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, па је површина пирамиде $P = 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^4-b^4}}{2}$, па је тражени полупречник $r = \dfrac{3V}{P} = \dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2} + 2b + \sqrt{a^2-b^2}}$.

2. Како је $D = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 6a & 1 \\ 1 & 6 & a \end{vmatrix} = 6(a-1)^2(a+2), D_x = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 6a & 1 \\ 1 & 6 & a \end{vmatrix} = 6(a-1)(a-6), D_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)(3a+2), D_z = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 6a & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 6(a-1)(a-6)$, то за $a \neq 1, a \neq -2$ систем има јединствено решење $(x,y,z) = (\frac{a-6}{(a-1)(a+2)}, \frac{(3a+2)}{3(a-1)(a+2)}, \frac{a-6}{(a-1)(a+2)})$, за $a = -2, D = 0, D_x \neq 0$, па систем нема решења, а за $a = 1$, одузимањем прве две једначине добијамо $0 = 5$, па ни у овом случају систем нема решења.

3. Нека су α и β углови између страница $a = AB$ и $b = BC$, односно $c = CD$ и $d = DA$, редом. Тада је $P(ABCD) = P(ABC) + P(ACD) = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leqslant \frac{1}{2}(ab+cd) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$. Једнакост у првој неједнакости важи акко $\alpha = \beta = 90°$, а у другој акко $a = b$ и $c = d$. Дакле, једнакост важи акко је дати четвороугао квадрат.

4. Поставимо координатни систем тако да је координатни почетак у центру квадрата, тачка A има координате $A(-a,-a)$, а тачка $B(a,-a)$, $a > 0$. Нека је $k > 0$ коефицијент правца праве AG. Тада је једначина те праве $y = k(x+a)-a$, па како тачка G лежи и на правој $y = a$, добијамо да су њене координате $G(\frac{2a}{k}-a, a)$. Слично добијамо: $E(0,-a)$, $EF : y = kx-a$, $F(a, ka-a)$, па је једначина праве $GF : y = \frac{k(k-2)}{2(1-k)}\cdot(x-a)+a(k-1)$. Растојање од тачке $(0,0)$, до праве GF износи: $\dfrac{|a[\frac{k(k-2)}{2(1-k)} - (k-1)]|}{\sqrt{1+\frac{k^2(k-2)^2}{4(k-1)^2}}} = a$, одакле следи тврђење задатка.

5. Из датих једнакости добијамо $\cos^2\alpha = \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \dfrac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma} - 1 = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma} - 1} - 1 = \dfrac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - 1} - 1 = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} - 1$. Одавде је $\cos^4\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0$, тј. $\cos^2\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, па због $\cos^2\alpha \geqslant 0$ следи $\cos^2\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Одавде је $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, па како је α оштар угао, следи $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Аналогно се добија $\sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за четврти разред А категорије.

2. Сређивањем добијамо: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^{2003}-1)-2003(x-1)}{(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^{2003}-1)+(x^{2002}-1)+\ldots+(x-1)}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\left[(x^{2002}+x^{2001}+\ldots+1)+(x^{2001}+x^{2000}+\ldots+1)+\ldots+(x+1)+1\right] =$

$= 2003+2002+\ldots+1 = \dfrac{2003\cdot2004}{2} = 2007006.$

3. Нека је $t = x-y, u = xy$. Систем постаје: $t+z = 6, t^2+2u+z^2 = 14, t(t^2+u)+z^3 = 36$. Из прве једначине је $t = 6-z$, а из друге $u = 6z-z^2-11$, па заменом у трећу и сређивањем добијамо $z^3-6z^2+11z-6 = 0$, одакле је $z \in \{1, 2, 3\}$. Следи да је $(t, u) \in \{(5, -6), (4, -3), (3, -2)\}$, одакле добијамо сва решења полазног система:
$(x, y, z) \in \{(2, -3, 1), (3, -2, 1), (1, -3, 2), (3, -1, 2), (1. -2, 3), (2, -1, 3)\}$.

4. Једначина тангенте у тачки $M(a, b)$, $a, b > 0$ је $\frac{xa}{8} + \frac{yb}{18} = 1$. Њени пресеци са координатним осама су тачке $A(\frac{8}{a}, 0), B(0, \frac{18}{b})$. Из $\frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{18} = 1$ налазимо $b = \frac{3}{2}\sqrt{8-a^2}$, па је $P(ABO) = \frac{72}{ab} = \frac{48}{a\sqrt{8-a^2}}$. Како је $P'(a) = \frac{96(a^2-4)}{a^2(8-a^2)^{\frac{3}{2}}}$, важи $P'(a) < 0$ за $0 < a < 2$, $P'(a) > 0$, за $2 < a < 2\sqrt{2}$, тј. минимум се достиже за $a = 2$. Дакле, тражена тачка је $M(2, 3)$.

5. Означимо са $z_k = x_k + iy_k$, за $k \geqslant 0$. Тада је $z_{n+1} = \sqrt{3}x_n + i^2 y_n + i(x_n + \sqrt{3}y_n) = (\sqrt{3} + i)(x_n + iy_n) = 2\frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})z_n$, за $n \geqslant 0$. Како је $z_0 = 1$, то је $z_{2003} = 2^{2003} \cdot (\cos(\dfrac{2003\pi}{6}) + i\sin(\dfrac{2003\pi}{6})) = 2^{2003} \cdot (\cos(\dfrac{11\pi}{6}) + i\sin(\dfrac{11\pi}{6}))$, па z_{2003} припада четвртом квадранту.

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ШКОЛСКУ 2003/2004. ГОДИНУ

Општинско такмичење .... средином јануара
Окружно такмичење .... 28.02.2004.
Републичко такмичење .... 27.03.2004.
Савезно такмичење .... 17.04.2004.

САДРЖАЈ