ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2004/2005.

Београд – Зрењанин 2005

Организацију такмичења су помогли:

- Покрајински секретаријат за образовање и културу, Нови Сад
- Општина Зрењанин
- НИС – Нафтагас, Нови Сад
- Дунав осигурање, Зрењанин
- Continental банка, Зрењанин
- А.Д. Дијамант, Зрењанин
- Фото студио "Ђенка", Нови Сад
- Бања "Русанда", Мелинци
- Омладинска задруга "Феникс", Зрењанин
- И.П. "Београд"
- ДДОР Нови Сад, филијала Зрењанин
- Т.А. "Минос", Зрењанин
- Д.О. "Lingva Educo", Зрењанин
- Културни центар, Зрењанин
- С.Р. "An Soft", Зрењанин
- С.Т.Р. "Стражилово", Зрењанин
- Д.О.О. "М.Б.", Зрењанин
- Сервис бироопреме "Копија", Зрењанин

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
47. РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Бањанин Станиша, начелник Школске управе Зрењанин
2. Дорословачки др Раде, председник ДМС
3. Којчић Анђелија, директор Зрењанинске гимназије
4. Миња Кокора Сперанца, помоћник директора Зрењанинске гимназије
5. Међо Милан, професор Зрењанинске гимназије
6. Толмач Војин, професор Зрењанинске гимназије
7. Манигода Горан, професор Зрењанинске гимназије
8. Јованић Марица, професор Зрењанинске гимназије
9. Радоњић Босиљка, професор Зрењанинске гимназије
10. Околишан Тодор , професор Зрењанинске гимназије
11. Бакушић Душанка, професор Зрењанинске гимназије
12. Киш Марија, професор Зрењанинске гимназије
13. Самоловац Саша, професор Зрењанинске гимназије
14. Косовац Кмезић Вера, професор Зрењанинске гимназије
15. Ковачевић Слободанка, професор Зрењанинске гимназије

Редакција и обрада:

Владимир Балтић

Запис о Зрењанину

Ето Вас у граду Зрењанину, престоници Баната, који се током своје дуге историје звао Велики Бечкерек и Петровград, Шпанци су га звали Нова Барселона, а могли бисмо га мирне душе звати и раванград. Зрењанин се налази на просечној надморској висини од $82m$ и нема иза чега сунце да зађе, па нам дан траје дуже него осталима. Насеље, па град, мењало је називе и становнике који су у њему живели. На мочварне и рицке просторе Марија Терезија и Јосиф II су, у време своје владавине (1740-1780-1790), насељавали Немце, Мађаре. Шпанце, Французе, Бугаре, Румуне, Словаке, Чехе, Русине... Лоша клима, рицка земља, пуно инсеката, били су сурови услови за живот, тако да су многи насељеници оболевали од маларије, колере, грознице и брзо би умирали.

Срби су преко Саве и Дунава масовно дошли са Арсенијем Чарнојевићем 1690. год. и на овој суровој равници остали и опстали захваљујући упорности, радиности и жељи да обезбеде огњишта за поколења која долазе. Данас у општини Зрењанин живи највише Срба 75%, Мађара 11%, Румуна 2 %, Словака 2%, а у селу Бело Блато на домак Зрењанина живи 15 националности, што представља најшароликују заједницу у земљи. Траг су у намаоставили сви претходни становници и они љути Крајишници који су у Банату 1594. год дигли прву буну против Турака.

Данас је равница укроћена и питома. Мочваре су исушене, меандри банацког лепотана Бегеја испављени огромним напором хиљада кулучара (од XVI – XVII века, у доба Турака) и претворени у прав, дубок, пловни канал, који нас преко Тисе повезује са Дунавом и светом. Системи за наводњавање супроцтављују се ветру и суши и из тешке, масне, банацке земље бујају индустријске биљке: пшеница, кукуруз, шећерна репа, соја, сунцокрет. "Та и дугме да посејеш никло би" , кажу Лале, што је име за становнике Баната. Прерада индустријских биљака обавља се у великим фабрикама за производњу хране: уљари, шећерани, ИПОК-у индустрији прерађевина од кукуруза млекари, БЕК-у месној индустрији, пивари... Али Зрењанин има и традицију текстилне, хемијске, фармацеуцке и машинске индустрије.

Зрењанин је, нарочито његов центар, пун лепих старих зграда најче71е барокног стила. Лепотом се истиче и даје печат граду, зграда Општине (некада Жупанијска зграда), саграђена у првој половини XIX века од опеке из порушене тврђаве, која је била на том истом месту док је постајала опасност од разних освајача. Испред зграде Општине, расте најлеша и најстарија тиса у граду, засађена још давне 1888. год. и памти да је преко трга испред ње пролазио воз, да је на тргу стајао споменик Краљу Петру, па Жарку Зрењанину, па фонтана и сада опет Краљ Петар, споменик урађен по угледу на онај стари а постављен ове зиме, године 2005.

Млади људи се најчешће и најрадије окупљају на простору између школа: музичке, економске, гимназије, електротехничке и Културног центра између којих је уређено језеро, настало преграђивањем бегејског меандра. На тај начин, настала су три језера у самом центру града. Поред ових школа концентрисаних око језера, у Зрењанину се налазе и хемијска, машинска и пољопривредна школа. Све средње школе укупно имају нешто мање од 7000 ђака. Ученицима који у Зрењанинске школе долазе из других места на располагање је смештај у дому ученика средњих школа, који се такође налази у самом центру града. Зрењанин је и град студената, на Вишој техничкој школи и Техничком факултету "Михајло Пупин" има око 3000 студената.

Свим ђацима и другим грађанима на располагању су богати културни садржаји: Библиотека, у којој су често књижевне вечери, Музеј, Позориште, са својом прелепом барокном салом и редовним репертоаром на великој, малој и луткарској сцени, Савремена галерија, два биоскопа, Културни центар као место окупљања младих људи. Наравно у граду од скоро 100 хиљада становника постоји мноштво кафића, клубова, кафаница и кафана са различитим специфичностима, али остављамо Вам да нешто и сами истражите и да у том истраживању уживате.

Зрењанин је иначе град богате музичке традиције. У граду постоји неколико хорова и певачких друштава који негују духовну музику.

Причу о нашем граду не можемо да завршимо а да не поменемо блиставу спорцку традицију. Готово да нема спорта у коме током историје и у савременом добу нисмо постизали врхунске резултате. Зрењанин је можда познатији по спорту него по било чему другом... Зрењанински пливачи, гимнастичари,веслачи,кајакаши, кошаркаши, фудбалери, одбојкаши, каратисти, рвачи, боксери, рукометаши, мачеваоци имају дугу и богату такмичарску традицију. Овом приликом посебно ћемо истаћи зрењанинске спортисте, носиоце олимпијских медаља: Милан Грбић, Бранислав Симић, Звонко Вујин, Милорад Станулов, Момир Рнић, Дејан Бодирога, Владимир Грбић, Никола Грбић.

Могли бисмо још много тога рећи о нашем граду и о нашој равници, о томе како нема на кугли земаљској лепшег призора од банацког житног мора, од непрегледних сунцокрета, од моћних, лењих и опасних равничарских река, о Царској бари, о Каштелу у Ечки и ликовној клонији, али ономе ко је овде први пут и оволико је превише, а ономе ко је овде већ био, и не треба причати.

Неколико речи о школи домаћину

Зрењанинска гимназија основана је 1846. године и следеће године обележава 160 година успешног рада. Од тих првих дана, када је у 6 разреда уписано 214 ученика, па до данас, када броји 1296 ученика у 42 одељења, прошла је кроз многе периоде реформи, подела, удруживања и експерименталног рада. Школу је до сада завршило око 23 000 ученика.

Данас је Зрењанинска гимназија једна од највећих гимназија у земљи, а свакако је највећа у Војводини.Ученици се образују по програму за гимназију општег, друштвено-језичког и природно-математичког смера. Настава се изводи на српском и мађарском наставном језику, а у рад са ученицима укључено је 106 професора и 3 стручна сарадника.

Резултати који се постижу у школи увек су били надпросечни. Што се тиче редовне наставе, 60% ђака има одличан успех, а око 30% њих врло добар.Ученици Зрењанинске гимназије већ традиционално постижу значајне резултате на такмичењима из математике, физике, информатике, биологије, спорцких дисциплина, као и на литерарним и ликовним конкурсима.

У школи се нарочито води рачуна о ваннаставним активностима, како би се ученицима пружила могућност да се испоље у свим областима интересовања. У оквиру додатног рада,организоване су секције из скоро свих предмета, а осим њих у школи активно ради и еколошка, драмска, рецитаторска и новинарска секција која уређује школски лист "Пут". Име школе по целом свету афирмише и омладински хор "Коча", који је члан Свецке федерације хорова.

Значајан допринос раду школе даје Ђачки парламент који активно ради од 2002. године. Ђачки парламент се бави свим битним питањима везаним за живот ђака у школи, координира рад одељенских заједница, организује хуманитарне акције, утиче на квалитетно кори71ење слободног времена ученика, промовише слободу мишљења и говора и сл.

Од 2002. године школа постаје једна од реформских гимназија у земљи и укључује се у пројекат Школског развојног планирања.Тренутно се овај пројекат, који промовише интерактивну и интердисциплинарну наставу, налази у фази реализације.

Нарочито су важни пројекти међународне сарадње, који подразумевају размену информација, заједничке семинаре и стручна путовања ученика и професора. Оваква сарадња успостављена је са гимназијом у Птују, путем пројекта "Млади и медији" у који су укључени гимназијалци из Пољске, Италије, Немачке, Мађарске и Словеније. Затим са гимназијом из града Вос у Норвешкој, а у току је успостављање сарадње и са једном од московских гимназија.Такође, већ неколико година наши ђаци и професори доносе вредне награде са међународне смотре ваннаставних активности "Shuliexpo", која се организује у мађарском граду Њиређхаз.

Зрењанинска гимназија 1996. године била је домаћин Републичког такмичења из физике и страних језика. У смислу препознавања правих вредности, жеља нам је да поново будемо добри домаћини и да поделимо са вама радост неговања такмичарског духа на 47. Републичком такмичењу из математике.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2004/2005.

1. Анић мр Иван, Математички факултет, Београд
2. Балтић Владимир, Економски факултет, Београд — председник Републичке комисије
3. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад — председник Друштва математичара Србије
5. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
6. Ђукић Душан, Универзитет у Торонту, Канада
7. Икодиновић мр Небојша, ПМФ, Крагујевац
8. Кнежевић Миљан, Математички факултет, Београд
9. Кртинић Ђорђе, Математички факултет, Београд
10. Маринковић Растко, Математичка гимназија, Београд
11. Матић Иван, Беркли, САД
12. Милићевић Ђорђе, Принстон, САД
13. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
14. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
15. Петровић Никола, Физички факултет, Београд
16. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
17. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
18. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 17. 12. 2004.

Први разред – А категорија

1. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла $\triangle ABC$ и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Наћи однос $CM : MB$.

2. Наћи све просте бројеве p, q и r, као и све природне бројеве n, такве да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}$.

3. Наћи сва решења једначине $x^2 + y^2 + z^2 = 2004 \cdot x \cdot y \cdot z$ у скупу целих бројева.

4. Нека је дат скуп $S = \{s, i, c, g\}$.
а) Колико има релација у скупу S које нису симетричне?
б) Колико има антисиметричних релација у скупу S?

5. Доказати или оповргнути: Међу произвољних 6 природних бројева увек је могуће наћи 3 тако да су свака 2 узајамно проста или 3 тако да сва 3 имају заједнички делилац већи од 1.

Други разред – А категорија

1. Нека је AB пречник круга k и нека се тетиве AD и BC тог круга секу у тачки E. Доказати да $AE \cdot AD + BE \cdot BC$ не зависи од избора тачака C и D.

2. Нека је O центар круга описаног око конвексног четвороугла $ABCD$ и нека је E пресек дијагонала AC и BD. Ако су средишта дужи AD, BC и OE колинеарне тачке доказати да је тада испуњено или $AB = CD$ или је $\sphericalangle AEB = 90°$.

3. Наћи сва решења (a, b) у скупу рационалних бројева једначине:
$(a + b\sqrt{2})^2 = 11 + 14\sqrt{2}$.

4. За које вредности реалног параметра m једначина
$mx^2 + (2m + 1)x + (m - 3) = 0$ има бар једно негативно решење?
Када има два негативна решења?

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак

након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 7 чланова одржала укупно 10 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 11 чланова одржала укупно 5 састанака (тј. ручкова)?

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$ тачка D је подножје висине из C, а тачка E подножје висине из D у $\triangle BCD$. Нека је F тачка дужи DE таква да је $DF : FE = BD : DA$. Доказати да су праве CF и AE узајамно нормалне.

2. У скупу реалних бројева решити једначину $x^{\log_2 3} + 3^{\log_2 \sqrt{x}} = 12$.

3. Колико решења у скупу ненегативних целих бројева има једначина $\left[\dfrac{100n}{199}\right] + \left[\dfrac{100n}{201}\right] = n$?

4. Нека су a, b и c комплексни бројеви такви да су сва три корена једначине $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ модула 1. Доказати да су сва три корена једначине $x^3 + |a|x^2 + |b|x + |c| = 0$, такође, модула 1.

5. После сваког састанка комисије, неки чланови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присутних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више отићи у заједничком друштву на ручак после састанка комисије. Састанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након састанка.
а) Да ли је могуће да је комисија која броји 8 чланова одржала укупно 15 састанака (тј. ручкова)?
б) Да ли је могуће да је комисија која броји 13 чланова одржала укупно 7 састанака (тј. ручкова)?

Четврти разред – А категорија

1. Бисектриса унутрашњег угла у темену A троугла $\triangle ABC$ сече страницу BC у тачки K. Центри уписаног круга троугла $\triangle ABK$ и описаног круга троугла $\triangle ABC$ се поклапају. Наћи углове троугла $\triangle ABC$.

2. Наћи сва пресликавања $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која су "на" (сурјекције) и за која важи: $f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y) \qquad$ за $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

3. Дата је функција $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+x^n}, \qquad x \geqslant 0$. Одредити нуле и знак функције $f(x)$, испитати монотонију, а затим нацртати график функције $f(x)$.

4. Видети 4. задатак за трећи разред А категорије.

5. У равни је задат n-тоугао чија темена имају целобројне координате, а странице су дужине $\sqrt{2005}$. За које $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 3)$ је то могуће?

Први разред – Б категорија

1. Видети 1. задатак за први разред А категорије.

2. Видети 2. задатак за први разред А категорије.

3. Наћи троцифрен број $\overline{abc}$ ако је четвороцифрен број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$.

4. Колико има има дијагонала конвексног 15-тоугла које спајају по два његова темена између којих се (посматрано у оба могућа смера) налазе бар три друга темена?

5. Висина AD из темена A троугла $\triangle ABC$ дели страницу BC у односу $BD : DC = 3 : 1$. Ако је $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, доказати да је троугао $\triangle ABC$ правоугли.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број $A = \left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ цео и наћи његову вредност.

2. Видети 2. задатак за први разред А категорије.

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

4. Видети 4. задатак за други разред А категорије.

5. У трапезу $ABCD$ краћа дијагонала AC нормална је на основицама $AB = a$ и $CD = b$. Ако је $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 90^\circ$, наћи дужине кракова BC и AD.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α, β и γ углови такви да важи $\beta = 60^\circ + \alpha$ и $\gamma = 60^\circ + \beta$. Доказати да је вредност израза $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha$ цео број.

2. Видети 2. задатак за трећи разред А категорије.

3. Наћи све целе бројеве x и y за које важи $x^2 + 8xy + 25y^2 = 225$.

4. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом од 60°. Одредити однос дужина страница паралелограма $AB : AD$, ако је однос дужина дијагонала $AC : BD = \sqrt{19} : \sqrt{7}$.

5. У правилној тространој пирамиди, чија је ивица основе a, угао између ивица при врху једнак је α ($\alpha \leqslant 90^\circ$). Одредити површину пресека пирамиде и једне равни која садржи једну ивицу основе и нормална је на наспрамну бочну ивицу.

Четврти разред – Б категорија

1. Три реална броја, различита од нуле, образују аритметички низ, а квадрати тих бројева у истом поретку, образују геометријски низ. Наћи количник тог геометријског низа.

2. Видети 2. задатак за трећи разред А категорије.

3. Видети 3. задатак за четврти разред А категорије.

4. Израчунати $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)$.

5. Доказати да једначина $\sin\left(\frac{1}{7}\arccos x\right) = 1$ нема реалних решења.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 19. 02. 2005.

Први разред – А категорија

1. Права кроз центар описаног круга и ортоцентар троугла $\triangle ABC$ (Ојлерова права), сече унутрашњост страница CA и CB у тачкама M и N, редом, таквим да је $CM = CN$. Доказати да је $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

2. Наћи све тачке P на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ за које је збир $PA + PB + PC$ минималан.

3. Нека су x и y цели бројеви, такви да 90 дели $x^2 + xy + y^2$.Доказати да онда 900 дели xy.

4. Нека су x, y и z реални бројеви, такви да је $x^2+y^2+z^2 = 18$ и $xy+yz+zx = 9$. Израчунати вредност израза $|x| + |y| + |z|$.

5. Ана и Бранко су ставили неки број жетона на поља шаховске табле 8×8. Ана је записала бројеве жетона у свакој врсти, а Бранко бројеве жетона у свакој колони. Ана је записала све различите бројеве. Да ли је могуће да су сви Бранкови бројеви различити од Аниних?

Други разред – А категорија

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$ тачка O је пресек дијагонала. Нека су E, F и G редом пројекције тачака B, C и O на AD. Доказати да је површина четвороугла $ABCD$ једнака $\dfrac{AD \cdot BE \cdot CF}{2OG}$.

2. Решити неједначину $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+2} \geqslant 3 + \sqrt{x+6}$.

3. Нека су x и y реални бројеви, такви да је $x^2 + y^2 \leqslant 25$. Одредити највећу и најмању вредност израза $x^2 + y^2 + 12x - 16y$.

4. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$ и $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ већи? (Образложити одговор!)

5. Дат је низ природних бројева $1 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ са особином да је $x_{n+1} \leqslant 2n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Да ли постоје индекси i и j такви да је $x_i - x_j = 2005$?

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, тачка D је средиште странице BC, а тачка E на страници AB таква да је $AE = 2EB$. Ако је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$, наћи угао $\sphericalangle ACB$.

2. Нека је дат природан број a. Доказати да постоји бесконачно много парова природних бројева (b, c) таквих да су $ab+1$, $ac+1$ и $bc+1$ потпуни квадрати.

3. Нека су a, b, c странице произвољног троугла и α, β углови наспрам страница a и b. Доказати да важи $a\cos\alpha + b\cos\beta \leqslant c$.

4. Нека су $x_1, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Наћи минималну вредност израза $-\dfrac{x_1^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

5. Дате су три тачке у равни. Наћи круг најмањег полупречника, који садржи ове тачке.
(Под кругом се подразумева кружница и њена унутрашњост)

Четврти разред – А категорија

1. Нека је у троуглу $\triangle ABC$ тачка H ортоцентар, M средина BC, D пресек AM са описаним кругом око $\triangle ABC$ и E симетрична тачка тачке D у односу на M. Доказати да је права EH нормална на праву AM.

2. Одредити последње 3 цифре броја 3^{2005}.

3. Наћи минимум функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}$. За које вредности x се достиже тај минимум?

4. У датом троуглу $\triangle ABC$ конструисати тачку M чији је збир квадрата растојања до правих AB, BC и CA минималан.

5. Да ли је могуће скуп природних бројева поделити на два дисјунктна скупа, тако да ни један од њих не садржи бесконачну аритметичку прогресију, код које нису сви елементи међусобно једнаки?

Први разред – Б категорија

1. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB \parallel DE$. Нека су M, P, N и Q редом средишта страница BC, CD, EF и FA, а K и L редом средишта дужи MN и PQ. Доказати да се тачке K и L поклапају ако и само ако је $AB = DE$.

2. Тетиве AB и AC круга k су једнаке, а тетива AD сече BC у тачки E. Доказати да је $\sphericalangle BEA = \sphericalangle ABD$.

3. Видети 3. задатак за први разред А категорије.

4. Одредити све природне бројеве a и b такве да број $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ буде рационалан.

5. Видети 5. задатак за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Тетиве AB и MN круга $k(O,r)$ секу се у унутрашњости круга у тачки C. Ако је $OC = \dfrac{3}{5}r$, тачка C средиште тетиве AB и $MC : CN = 4 : 9$, одредити синус угла $\sphericalangle ACM$.

2. Решити једначину $\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$.

3. У скупу комплексних бројева решити једначину $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$.

4. Видети први део 3. задатка за други разред А категорије.

5. Видети 5. задатак за први разред А категорије.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да ни за која три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не могу истовремено да важе следеће три неједнакости: $\sqrt{3}\cdot|\vec{a}| < |\vec{b}-\vec{c}|$, $\sqrt{3}\cdot|\vec{b}| < |\vec{c}-\vec{a}|$, $\sqrt{3}\cdot|\vec{c}| < |\vec{a}-\vec{b}|$.

2. У зависности од реалних параметара α и β решити систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \beta z & = & \alpha+2\beta \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha^2+\beta+1 \\ x & + & y & + & 2\beta z & = & \alpha+3\beta \end{array}.$$

3. Видети 3. задатак за трећи разред А категорије.

4. Видети 4. задатак за други разред А категорије.

5. Раван ромба $ABCD$ и раван правоуглог трапеза $DCEF$ су међусобно нормалне ($DC \perp DF$, $DC \parallel EF$, $DC > EF$) и важи $\cos\sphericalangle BCE = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{DF}{CE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Наћи однос странице ромба и полупречника уписаног круга ромба.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити све природне бројеве, n такве да је број $2^n + n^2$ дељив са 7.

2. У полулопту полупречника R уписана је правилна четворострана призма максималне запремине, тако да доња основа призме припада основи полулопте, а темена горње основе призме припадају површи полулопте. Одредити висину те призме.

3. Видети 3. задатак за четврти разред А категорије.

4. Испитати монотоност низа $\{a_n\}$, који је дат са $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$.

5. Међу комплексним бројевима z који задовољавају једнакост $\left|\dfrac{z-i}{z-2i}\right| = \dfrac{1}{2}$ одредити онај који има највећи модуо.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 19. 03. 2005.

Први разред – А категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2005?

2. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао са $AB = AC$. Дата је тачка D на страници AC, таква да је $CD = 2AD$ и тачка P на дужи BD. Ако је $\sphericalangle APC = 90^\circ$, доказати да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCB$.

3. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_{501}$ произвољне, међусобно различите тачке у равни. Доказати да на било којој кружници полупречника 4 постоји тачка M за коју је испуњено да је збир дужина дужи $MA_1, MA_2, \ldots, MA_{501}$ већи или једнак 2004.

4. За реалне бројеве a и b доказати следећу неједнакост:
$a(1+b^2) + b(1+a^2) \leqslant (1+a^2)(1+b^2)$.

5. На табли је написано 2005 јединица. Дозвољено нам је да избришемо два од записаних бројева и уместо њих напишемо четвртину њихове суме. Овај поступак понављамо док на табли не остане само један број. Доказати да последњи преостали број није мањи од 1/2005.

Други разред – А категорија

1. Нека су a, b, c природни бројеви такви да је $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Ако је d највећи заједнички делилац бројева a, b, c, доказати да је $abcd$ потпун квадрат.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. На дужима BH и CH одређене су тачке B_1 и C_1 такве да је $\sphericalangle AB_1C = \sphericalangle AC_1B = 90^\circ$. Доказати да је $AB_1 = AC_1$.

3. Нека је P тачка унутар оштроуглог троугла $\triangle ABC$, $AC < BC$, таква да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Права CP сече AB у тачки D. Доказати да је $\dfrac{AD}{DB} < \dfrac{AC^2}{CB^2}$.

4. Дата су 2 квадратна полинома са реалним коефицијентима, $P_1(x) = x^2 + a_1x + b_1$ и $P_2(x) = x^2 + a_2x + b_2$, при чему важи: $(b_1 - b_2)^2 + (a_1 - a_2)(a_1b_2 - a_2b_1) < 0$. Доказати да тада оба полинома имају реалне корене и да се између два корена сваког од тих полинома налази корен оног другог.

5. Колико има пермутација π скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је производ $(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 2)\ldots(\pi_n - n)$ непаран број?

Трећи разред – А категорија

1. Нека $S(n)$ означава збир цифара природног броја n. Наћи све бројеве n такве да је $S(n) = S(2n) = \ldots = S(n^2)$.

2. Нека су E и F тачке на страницама AC и AB троугла $\triangle ABC$ такве да је $EF \parallel BC$. Доказати да пресечне тачке кругова над пречницима BE и CF припадају висини из темена A.

3. У четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle DAB = 150°$, $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABD = 120°$ и $\sphericalangle DBC - \sphericalangle ABD = 60°$. Наћи $\sphericalangle BDC$.

4. Нека за позитивне реалне бројеве x и y важи $x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4$. Доказати да је $x^3 + y^3 \leqslant 2$.

5. Доказати да се за свако $n \in \mathbb{N}$, међу свим природним бројевима који садрже у свом декадном запису само цифре 1, 9 и 2 (и при том се свака од њих бар једном појављује у том запису) може наћи бар један који је дељив са 2^n.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су $a, b \in \mathbb{Z}$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ број $a \cdot 2^n + b$ је потпун квадрат. Доказати да је $a = 0$.

2. У круг k је уписан шестоугао $ABCDEF$, при чему су странице AB, CD и EF једнаке полупречнику круга k. Доказати да средишта преостале три странице представљају врхове једнакостраничног троугла.

3. Ако су $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ сви делиоци природног броја $n > 1$, доказати да је $d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}$.

4. Низ $\{a_i\}$ задат је рекурентно: $a_1 = a_2 = 1$, $\quad a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$, за $n \geqslant 1$. Доказати да су сви чланови тог низа цели бројеви.

5. Унутар јединичног круга дата је 801 тачака, од којих је једна центар круга и она је обојена плаво, а остале су црвене. Познато је да се међу датим тачкама не налазе 3 колинеарне. Доказати да мала Ангелина може наћи кружни исечак од 45° који садржи тачно 100 црвених тачака. Мала Ангелина не сме да сече круг по правама које садрже неку од црвених тачака.

Први разред – Б категорија

1. Видети 1. задатак за први разред А категорије.

2. Нека су A_1, B_1, C_1 редом пресечне тачке симетрала унутрашњих углова из темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са описаним кругом око троугла $\triangle ABC$. Доказати да је центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ ортоцентар троугла $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Нека су a, b и c различити цели бројеви. Показати да је и $m = \dfrac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$ такође цео.

4. Доказати да се број $\underbrace{11...11}_{2005}\underbrace{22...22}_{2005}$ може написати као производ два узастопна природна броја.

5. Квадрат 2×2 подељен је на 4 квадратића 1×1. Сваки од квадратића је обојен црвеном, плавом или белом бојом.
а) Колико има различитих бојења?
б) Колико има различитих бојења у којима се све три боје појављују?

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број $1\underbrace{000\ldots00}_{2^{2004}+2^{1000}-1}1$ сложен.

2. Видети 2. задатак за други разред А категорије.

3. Реални бројеви x и y задовољавају систем једнакости $\begin{aligned} x+y+\frac{x}{y} &= 10 \\ \frac{x(x+y)}{y} &= 20. \end{aligned}$

Пронађите суму свих могућих вредности израза $x+y$.

4. Решити неједначину $\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$.

5. Доказати да за све природне бројеве n важи $\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1} < 2\sqrt[3]{n}$.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити једначину $\sqrt{x^{\,x}} = x^{\sqrt{x}}$ у скупу позитивних реалних бројева.

2. Нека је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дата са $f(x) = \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$, за свако $x\in\mathbb{R}$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.

3. Видети 3. задатак за трећи разред А категорије.

4. Ако важи $x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = 1,\ x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi = 1,\ x\operatorname{tg}\alpha = y\operatorname{tg}\varphi,\ x \neq y$ доказати да важи $x + y = 2xy$.

5. Доказати да за све природне бројеве $n \geqslant 3$ важи $\log_{n-1} 10 + \log_{n+1} 10 > 2\log_n 10$.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити неједначину $\sqrt{5 - 2\sin\dfrac{x}{6}} \geqslant 6\sin\dfrac{x}{6} - 1$.

2. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

3. Видети 3. задатак за четврти разред А категорије.

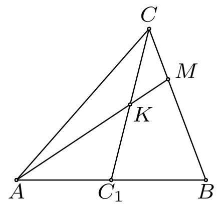
4. Доказати неједнакост: $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}$.

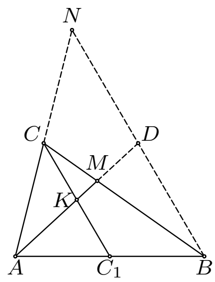
5. Израчунати површину правилне четворостране призме запремине $V = 12\sqrt{3}$ код које је збир дужина свих ивица најмањи.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. <u>*Решење 1*:</u> Тачка K је средиште дужи CC_1, те је $\overrightarrow{AK} = \dfrac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2}$. Вектори $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ су колинеарни, тј. $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AM}$ и како је C_1 средиште дужи AB, тј. $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, претходна једнакост добија облик $\lambda\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2\lambda}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AB}$. Како су тачке C, M и B колинеарне то је $\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = 1$, тј. $\lambda = \frac{3}{4}$, па је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, односно $CM : MB = 1 : 2$.





<u>*Решење 2*:</u> Нека је N тачка на правој AC, таква да је $BN \parallel CC_1$ и нека је $AM \cap BN = \{D\}$. Тада је $\dfrac{CK}{KC_1} = \dfrac{ND}{DB}$, па је $ND = BD$ и $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AC}{CN}$, па је $AC = CN$. Дужи BC и AD су тежишне дужи троугла $\triangle ABN$, па је M тежиште тог троугла, одакле следи да је $CM : MB = 1 : 2$.

2. Претпоставимо да су прости бројеви p, q и r међусобно различити. Тада, из услова задатка имамо $pqr = n(pq + qr + rp)$, а како су p, q и r различити прости бројеви, они су и узајамно прости, те добијамо да $p \mid n$, $q \mid n$ и $r \mid n$, тј. $n = kpqr$, за неки природан број k. Међутим, тада добијамо $1 = k(pq + qr + rp)$, што је немогуће.
Претпоставимо да су тачно два од простих бројева p, q и r међусобно једнака. Без умањења општости можемо узети да је $p = q \neq r$. Тада добијамо $pr = n(p + 2r)$. Како су прости бројеви r и p узајамно прости добијамо $(r, p) = 1 \;\Rightarrow\; (r, p + 2r) = 1$. Стога мора да $r \mid n$, односно $n = rl$ за неки природан број l. Како је $p + 2r > 1$, то из $p = l(p + 2r)$ добијамо $p + 2r = p$, што је немогуће.
Дакле, $p = q = r$, што кад уврстимо у полазну једначину добијамо да је $p = 3n$, а p је прост број, те налазимо једино решење $(p, q, r, n) = (3, 3, 3, 1)$.

3. Једначина има тривијално решење $x = y = z = 0$. Покажимо да нема других решења. Претпоставимо супротно да има неко решење $(x_0, y_0, z_0) \neq$

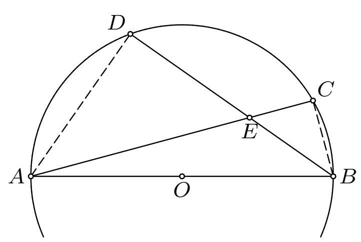
$(0,0,0)$. Без умањења општости можемо узети да је $x_0 \neq 0$ и нека је 2^k највећи степен броја 2 који дели x_0. Израз на десној страни је дељив са 4. Како тачан квадрат даје остатке 0 и 1 при дељењу са 4 добијамо да сва три броја, x_0, y_0, z_0, морају бити парни: $x_0 = 2x_1$, $y_0 = 2y_1$ и $z_0 = 2z_1$. Уколико ово уврстимо у полазну једнакост добијамо $4({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2) = 2004 \cdot 8x_1y_1z_1$, односно ${x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 = 4008x_1y_1z_1$. Сада аналогним поступком добијамо и да су сви бројеви x_1, y_1, z_1 парни. Понављајући овај поступак $k+1$ пута добијамо да је број x_0 дељив са 2^{k+1}, што је у контрадикцији са претпоставком да је 2^k највећи степен броја 2 који дели x_0, чиме смо показали да једначина има само тривијално решење.

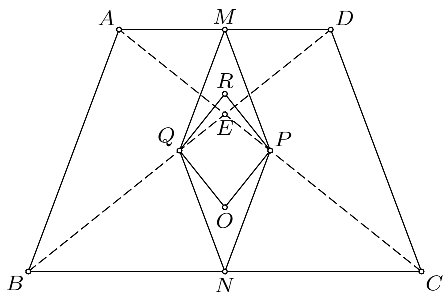
4. а) $|S| = 4$. Свака 2 елемента из $S \times S$ могу бити у релацији ρ или не бити у релацији. Стога је укупан број релација једнак:
$2^{|S\times S|} = 2^{4\cdot 4} = 2^{16} = 65536$.
Код симетричних релација када одредимо да ли су у релацији елементи са главне дијагонале и изнад ње у таблици потпуно је одређено да ли су у релацији и елементи испод главне дијагонале. Стога је укупан број симетричних релација једнак $2^{4+3+2+1} = 2^{10} = 1024$, а укупан број несиметричних релација добијамо када претходни број одузмемо од укупног броја релација: $2^{16} - 2^{10} = 65536 - 1024 = 64512$.
б) За елементе са главне дијагонале имамо 2 могућности (или су у релацији или нису, тј. $a\,\rho\,a$ или $a \not\rho a$), а за сваки пар симетричних места у односу на главну дијагоналу, (a,b) и (b,a), имамо 3 могућности (или је $a\,\rho\,b$ и $b \not\rho a$, или је $b\,\rho\,a$ и $a \not\rho b$, или је $a \not\rho b$ и $b \not\rho a$). Стога је укупан број антисиметричних релација једнак $2^4 \cdot 3^{3+2+1} = 16 \cdot 729 = 11664$.

5. Оповргнућемо тврђење. Контрапример је шесторка $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $3\cdot 5$, $7\cdot 11$, $7\cdot 13$, $11\cdot 13$, која не задовољава ниједан услов задатка.

Други разред – А категорија

1. Користимо да су троуглови $\triangle BCA$ и $\triangle ADB$ правоугли, као и потенцију тачке E у односу на круг k: $AE\cdot ED = BE\cdot EC$. Стога имамо да је $AE\cdot AD = AE^2 + AE\cdot ED = AC^2 + EC^2 + AE\cdot ED = AC^2 + EC^2 + BE\cdot EC = AC^2 + EC(EC + BE) = AC^2 + EC\cdot BC = AC^2 + (BC - BE)\cdot BC = AC^2 + BC^2 - BE\cdot BC$, па је $AE\cdot AD + BE\cdot BC = AB^2$.





2. Довољно је показати – Ако је $\sphericalangle AEB \neq 90^\circ$, онда је $AB = CD$. Нека је $\sphericalangle AEB \neq 90^\circ$.
Ако је $O \equiv E$, тада је $ABCD$ правоугаоник, па важи $AB = CD$.
Претпоставимо да је $O \not\equiv E$. Нека су M, N, P, Q средишта дужи AD, BC, AC, BD, редом, и нека је R пресек нормала из тачака P и Q редом на BD и AC.
Четвороуглови $MPNQ$ и $OPRQ$ су паралелограми, па се дужи MN, OR и PQ секу у једној тачки која их и полови. Пошто средиште дужи OE лежи на MN имамо да је $RE \parallel MN$. С друге стране, R је ортоцентар $\triangle PQE$, па је $RE \perp PQ$. Дакле, $MN \perp PQ$, тј. $MPNQ$ је ромб. Сада је лако показати да је $AB = 2PN = 2NQ = CD$.

3. Еквивалентним трансформацијама долазимо до: $a^2 + 2b^2 - 11 = (14 - 2ab)\sqrt{2}$. Сада имамо два случаја: ако је $2ab \neq 14$, добијамо да је $\sqrt{2} = \dfrac{a^2 + 2b^2 - 11}{(14 - 2ab)}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{2}$ ирационалан број, а израз са десне стране рационалан. Друга могућност је да важи $2ab = 14$. Тада важи и $a^2 + 2b^2 = 11$, па је $(a - 2b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 - 2ab\sqrt{2} = 11 - 14\sqrt{2} < 0$. Ово је контрадикција, па задатак нема решења.

4. <u>*Решење 1*</u>: За $m = 0$ полазна једначина је линеарна једначина $x - 3 = 0$ и она има само позитивно решење ($x = 3$).
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m + 1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$.
Оба решења су негативна, уколико важи $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 \cdot x_2 > 0$: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} > 0$ за $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, те пресек услова $m \geqslant \frac{-1}{16}$ са ова два услова даје $m \in (3, +\infty)$.
Ако је тачно једно решење негативно онда је друго позитивно или 0. Једно решење је негативно, а друго позитивно, уколико важи $D \geqslant 0$ и $x_1 \cdot x_2 < 0$: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} < 0$ за $m \in (0, 3)$ и пресек услова $m \geqslant \frac{-1}{16}$ са овим условом даје $m \in (0, 3)$. Једно решење је негативно, а друго 0, уколико

важи: $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 < 0$ и $x_1 \cdot x_2 = 0$: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2m+1}{m} < 0$ за $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{b}{a} = \dfrac{m-3}{m} = 0$, тј. за $m = 3$ (то је решење јер је $3 \geqslant \frac{-1}{16}$ и $3 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$). Значи, једначина има тачно једно негативно решење за $m \in (0, 3]$.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0, +\infty)$, а два за $m \in (3, +\infty)$.

Решење 2: За $m = 0$ полазна једначина је линеарна једначина $x - 3 = 0$ и она има само позитивно решење ($x = 3$).
За $m \neq 0$ то је квадратна једначина и да би она имала реална решења потребно је да је њена дискриминанта $D = 16m + 1 \geqslant 0$, што даје услов $m \geqslant \frac{-1}{16}$. Њена решења су дата формулом

$$x_{1,2} = \frac{-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1}}{2m}.$$

Испитајмо када је $|2m+1| < \sqrt{16m+1}$. Квадрирамо и добијамо неједначину $m^2 - 3m < 0$, што је испуњено за $m \in (0, 3)$. Онда је $|2m+1| > \sqrt{16m+1}$ за $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.
Ако је $m \in [\frac{-1}{16}, 0)$ онда су и именилац ($2m < 0$) и бројилац ($-(2m+1) - \sqrt{16m+1} < 0$) за оба решења негативни, па су оба решења позитивна.
Ако је $m \in (0, 3]$ онда је именилац позитиван ($2m > 0$), док је бројилац једном позитиван ($-(2m+1) + \sqrt{16m+1} > 0$), а једном негативан ($-(2m+1) - \sqrt{16m+1} < 0$), па је једно решење позитивно, а друго је негативно.
Ако је $m \in (3, +\infty)$ онда је именилац позитиван ($2m > 0$), док су бројиоци за оба решења негативни ($-(2m+1) \pm \sqrt{16m+1} < 0$), па су оба решења негативна.
Једначина има бар једно негативно решење за $m \in (0, +\infty)$, а два за $m \in (3, +\infty)$.

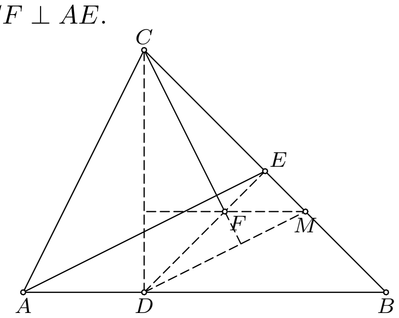
5. а) Може. Није тешко конструисати пример. Означимо бројевима 1-7 чланове. Укупно има $\binom{7}{2} = 21$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду три ту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са 5 губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 11 ручкова. То можемо нпр. ако на почетку иду $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}$, а осталих 8 ручкова су сви са по два члана, који још парови фале:
$\{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$.

Напомена: Може на још један начин са 1×4, 3×3 и 6×2.

б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{11}{2} = 55$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $5 \cdot 10 < 55$, јасно је да од тих 5 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 5 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође немогуће је да су преосталих 4 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{10}{2}+4<55$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничког члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5\cdot 2=10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је M тачка странице BC таква да је $DM \parallel AE$. Тада је $EM : MB = AD : DB = EF : FD$, па је $MF \parallel AB$, а онда и $MF \perp CD$. Како је и $DE \perp BC$, добијамо да је тачка F ортоцентар троугла $\triangle CDM$, па је $CF \perp DM$, а тиме и $CF \perp AE$.



2. За $x>0$ су сви логаритми и степени дефинисани. Како је $3^{\log_2 \sqrt{x}} = 3^{\frac{1}{2}\log_2 x} = \sqrt{3^{\log_2 x}}$ и $x^{\log_2 3} = 3^{\log_2 x}$, то је дата једначина еквивалентна једначини $t^2+t-12=0$ (смена $t=\sqrt{3^{\log_2 x}}$), чија су решења $t_1=-4<0$ и $t_2=3$. Због $t>0$ имамо $\sqrt{3^{\log_2 x}}=3$, па је $\log_2 x = 2$, тј. $x=4$.

3. Нека су a и b редом остаци при дељењу $100n$ са 199 и 201. Задата 3.
једначина постаје $\frac{100n-a}{199}+\frac{100n-b}{201}=n$, што се након свођења на заједнички именилац своди на $n=201a+199b$.

С друге стране, за све $a=0,1,\ldots,198$ и $b=0,1,\ldots,200$, $n=201a+199b$ је решење једначине. Заиста, остаци при дељењу $100n=20100a+19900b$ са 199 и 201 су редом a и b, па сад лако проверавамо да је $\left[\frac{100n}{199}\right]+\left[\frac{100n}{201}\right]=n$. Како се за различите вредности бројева a и b добијају различите вредности за n, решења има онолико колико има парова (a,b), а ових има тачно $199\cdot 201=39999$.

4. Нека су z_1, z_2 и z_3 корени једначине $x^3+ax^2+bx+c=0$, а w_1, w_2 и w_3 корени једначине $x^3+|a|x^2+|b|x+|c|=0$. Тада, користећи Виетове формуле, налазимо да важи

$$|a| = |-a| = |z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| = 3,$$

$$|b| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = |z_1 z_2 z_3|\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|$$
$$= |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3| = |a|,$$

као и $|z_1 z_2 z_3| = |-c| = |c| = 1$. Са друге стране, применом Виетових формула на другу једначину и чињеница $|a| = |b|$ и $|c| = 1$, добијамо да је $w_1 = -1$ решење исте. Дакле, друга једначина је еквивалентна једначини

$$x^3 + |a|x^2 + |a|x + 1 = (x+1)(x^2 + (|a|-1)x + 1) = 0,$$

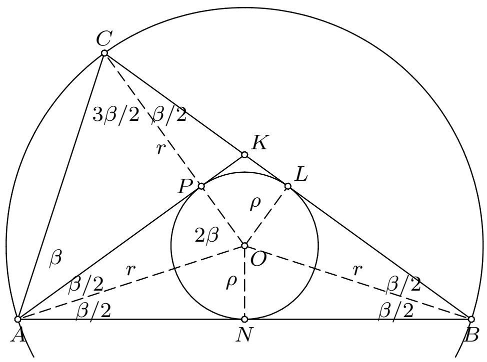
па су w_2 и w_3 корени квадратне једначине $x^2 + (|a|-1)x + 1 = 0$ (из Виетових формула имамо да је $w_2 w_3 = 1$ – требаће нам касније). Међутим, како је $0 \leqslant |a| \leqslant 3$, то за дискриминанту ове једначине важи $D = (|a|+1)(|a|-3) \leqslant 0$. Ако је $|a| = 3$ тада је $w_2 = w_3 = -1$, односно $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$. За $0 \leqslant |a| < 3$ је $D < 0$ па имамо два конјуговано комплексна корена, $w_3 = \overline{w_2}$, и за њих важи $|w_2|^2 = w_2\overline{w_2} = w_2 w_3 = 1$, као и $|w_3|^2 = w_3\overline{w_3} = w_3 w_2 = 1$. Тиме смо показали да је у сваком случају $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$.

5. а) Може. Није тешко конструисати пример.Означимо бројевима 1-8 чланове. Укупно има $\binom{8}{2} = 28$ парова, па ће ручкова бити максимално ако стално иду по два члана. Ако иду три члана ту се већ изгубе 2 будућа ручка, ако иду четири губи се 5 ручкова, са пет чланова губи се 9 итд. Ми треба да изгубимо 13 ручкова. То можемо нпр ако иду $\{1,2,3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{1,6,8\}$, а осталих 12 ручкова сви по 2 члана који још парови фале.

б) Не може. Наиме, парова има укупно $\binom{13}{2} = 78$. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар особа постоји тачно један ручак на коме су биле заједно. На ручку за k особа "потроши" се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$, а $7 \cdot 10 < 78$, јасно је да од тих 7 ручкова бар на једном од њих је морало бити присутно 6 или више особа (у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, тј. и након тих 7 ручкова било би могуће организовати још неки). Такође, немогуће је да су преосталих 6 ручкова сви двочлани јер би опет остао неки пар који није био на ручку заједно (јер очигледно највише $\binom{12}{2} + 6 < 78$ различитих парова чланова је било заједно на ручку). Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више. Но та два ручка имају највише 1 заједничког члана. Онда значи имамо бар 5 особа са првог ручка које још нису ручале са бар 2 особе са другог ручка. За то је потребно је организовати бар још $5 \cdot 2 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. Контрадикција.

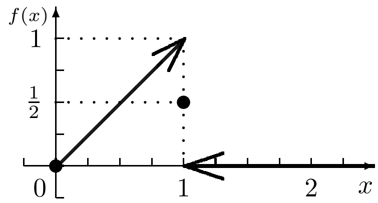
Четврти разред – А категорија

1. Означимо са O тачку која је истовремено и центар уписаног круга у $\triangle ABK$ (полупречника ρ) и центар описаног круга око $\triangle ABC$ (полупречника r). Нека су N, L и P, респективно, тачке у којима уписани круг у $\triangle ABK$ додирује странице AB, BK и KA. Тада су подударни правоугли троуглови $\triangle APO \cong \triangle ANO \cong \triangle BNO \cong \triangle BLO$ (хипотенузе су им једнаке R, катете r и угао наспрам веће странице је $90°$). Одатле имамо да је $\sphericalangle BCO = \sphericalangle KAO = \sphericalangle BAO = \frac{\beta}{2}$. Како је AK симетрала угла добијамо да је $\sphericalangle CAK = \sphericalangle KAb = \beta$. Угао $\sphericalangle AOC$ је централни за угао $\sphericalangle ABC = \beta$ па је $\sphericalangle AOC = 2\beta$. Из троугла $\triangle AOC$ налазимо да је $\sphericalangle ACO = 180° - \frac{7}{2}\beta$, али како је тај троугао једнакокрак ($AO = CO = R$) добијамо да је $\beta = 36°$. Одатле директно добијамо да су углови у троуглу $\triangle ABC$ једнаки $\sphericalangle ABC = 36°$, $\sphericalangle BCA = 72°$ и $\sphericalangle CAB = 72°$.



2. Означимо са $(*)$ услов задатка $\quad f\big(f(x-y)\big) = f(x) - f(y) \quad$ за $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Како је $f(x)$ "на", онда за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји неко $a \in \mathbb{R}$ такво да је $x = f(a)$. Сада из $(*)$ имамо $f(x) = f\big(f(a-0)\big) = f(a) - f(0) = x - f(0)$. Када овде ставимо $x = 0$ добијамо $f(0) = 0$, па је $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$.
Лако се проверава да ова функција задовољава једначину $(*)$.

3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$.



Нуле функције су $x = 0$ и сви бројеви $x > 1$. $f(x) > 0$ за $0 < x \leqslant 1$, а $f(x) < 0$ није никад. Функција $f(x)$ је растућа за $0 \leqslant x < 1$, у $x = 1$ има тачку прекида, а за $x > 1$ је константна.

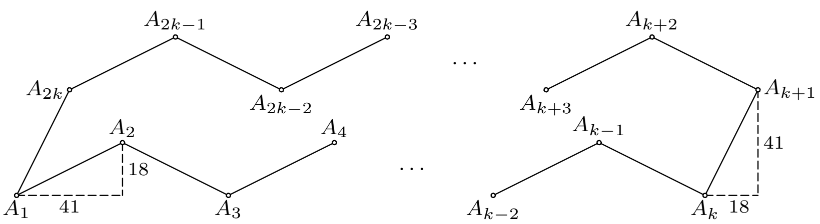
4. Видети решење 4. задатка за трећи разред А категорије.

5. Кад се померимо из једног темена у суседно промени се парност збира координата. Стога, ако је n непаран број, када кренемо из једног темена и

обиђемо остала и вратимо се у полазно, парност збира координата би била промењена што није могуће, те за n непарно не постоји такав n-тоугао.
За n парно, 2005 треба да представимо као збир два квадрата. Како је $2004 = 5 \cdot 401 = (2^2+1)\cdot(20^2+1)$, коришћењем формуле

$$(x^2+y^2)(a^2+b^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (ax-by)^2 + (ay+bx)^2$$

добијамо представљања $2005 = 41^2 + 18^2 = 39^2 + 22^2$ (може се показати да су она и једина). Стога страницу дужине $\sqrt{2005}$ можемо добити као хипотенузу правоуглих троуглова са катетама 41 и 18 (или 39 и 22). Решење је дато као на слици:



Први разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за први разред А категорије.

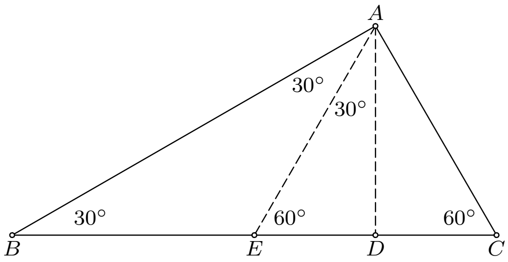
2. Видети решење 2. задатка за први разред А категорије.

3. Важи: $a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + 1 = 3\cdot(2\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c)$. Како се број $3c$ завршава јединицом, то је $c = 7$, те добијамо $1000a + 100b + 71 = 6000 + 300a + (3b+2)\cdot 10 + 1$. Како је b цифра ($0 \leqslant b \leqslant 9$), биће $2 \leqslant 3b+2 \leqslant 29$. Број $3b+2$ се завршава цифром 7, па је $3b+2 \in \{7, 17, 27\}$. Могуће је само $b = 5$. Сада је $1000a + 571 = 6000 + (3b+1)\cdot 100 + 71$. Како је и a цифра, биће $1 \leqslant 3a+1 \leqslant 28$ и $3a+1$ се завршава цифром 5, те је $3a+1 = 25$, тј. $a = 8$. Тражени број је 857.

4. Свако од темена не може бити спојено са самим собом и са суседних 6 темена (по 3 са сваке стране). Дакле, свако од 15 темена може бити спојено са преосталих 8 темена, а како на овај начин сваку дијагоналу бројимо 2 пута (код сваког од темена по једном) добијамо да је тражени број дијагонала једнак $\dfrac{15\cdot 8}{2} = 60$.

5. Нека је AE симетрала угла $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \sphericalangle ABC = 60^\circ$. Тада је $\triangle AEB$ једнакокраки троугао ($\sphericalangle BAE = 30^\circ = \sphericalangle ABE$) и $AE = BE$. Како је и $\triangle AED$ половина једнакостраничног троугла имамо да је $ED = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{BE}{2}$, односно $BD = \dfrac{3}{4}BC$, те је $CD = DE = \dfrac{1}{4}BC$. Сада из подударности $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ добијамо $AC = AE$, а како је $AE = BE = \dfrac{1}{2}BC = EC$, налазимо да је троугао

$\triangle AEC$ једнакостраничан. Према томе, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.



Други разред – Б категорија

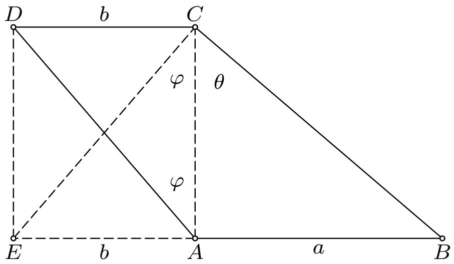
1. Како је $9 + 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2$, имамо да је
$A = \left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 2\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = -2$.

2. Видети решење 2. задатка за први разред А категорије.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x = 3y \pm 2\sqrt{25 - y^2}$, па је $|y| \leqslant 5$ и $\sqrt{25 - y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y \in \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$. Решења су:
$(x, y) \in \{(10, 0), (-10, 0), (-1, -3), (-17, -3), (1, 3), (17, 3), (-6, -4), (-18, -4), (6, 4), (18, 4), (-15, -5), (15, 5)\}$.

4. Видети решење 4. задатка за други разред А категорије.

5. Нека је E подножје нормале из D на праву AB. Тада је $EACD$ правоугаоник, стога и због услова задатка је $\sphericalangle ECB = \sphericalangle ECA + \sphericalangle ACB = \varphi + \theta = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACB = 90^\circ$. У правоуглом троуглу $\triangle CEB$ је $EC^2 = EB \cdot EA = (a + b) \cdot b$ и $CB^2 = EB \cdot AB = (a + b) \cdot a$, па је $AD = EC = \sqrt{b(a + b)}$ и $BC = \sqrt{a(a + b)}$.



Трећи разред – Б категорија

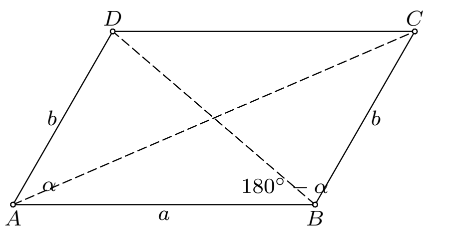
1. Нека је $\operatorname{tg}\alpha = a$. Тада је $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) = \dfrac{a + \sqrt{3}}{1 - a\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) =$

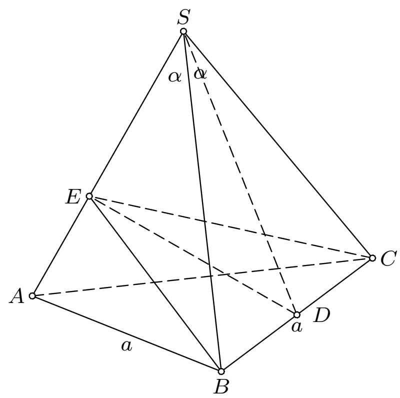
$\dfrac{a-\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}$. Сада имамо $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a^2+a\sqrt{3}}{1-a\sqrt{3}}+\dfrac{a^2-3}{1-3a^2}+\dfrac{a^2-a\sqrt{3}}{1+a\sqrt{3}}=\dfrac{9a^2-3}{1-3a^2}=-3$.

2. Видети решење 2. задатка за трећи разред А категорије.

3. Решавањем полазне једначине по x налазимо $x=-4y\pm 3\sqrt{25-y^2}$, па је $|y|\leqslant 5$ и $\sqrt{25-y^2}$ треба да буде цео број. Дакле, имамо да је $y\in\{0,\pm3,\pm4,\pm5\}$. Решења су:
$(x,y)\in\{(15,0),(-15,0),(24,-3),(0,-3),(-24,3),(0,3),(25,-4),$
$(17,-4),(-25,4),(-17,4),(20,-5),(-20,5)\}$.

4. Означимо $AB=CD=a$, $AD=BC=b$, $BD=d_1=\sqrt{7}\cdot k$, $AC=d_2=\sqrt{19}\cdot k$, $\sphericalangle BAD=\alpha$ (за који треба да видимо да ли је 60° или 120°), $\sphericalangle ABC=180^\circ-\alpha$. Применимо косинусну теорему на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$: ${d_1}^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, ${d_2}^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)$, па како је $d_1<d_2$ добијамо да је $\alpha=60^\circ$. Дакле, ${d_1}^2=a^2+b^2-ab$, ${d_2}^2=a^2+b^2+ab$, па је $\dfrac{{d_2}^2}{{d_1}^2}=\dfrac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}=\dfrac{19}{7}$, тј. $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1+\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1-\frac{a}{b}}=\dfrac{19}{7}$, одакле налазимо квадратну једначину $\frac{12}{7}\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{26}{7}\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{12}{7}=0$. Кад је решимо добијамо да је $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ или $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$.





5. Означимо са A,B,C темена основе и са S врх пирамиде. Нека је D средиште ивице BC ($BD=\frac{1}{2}a$) и нека је E пресек равни која садржи BC и нормална је на AS. Тада је $BE\perp AS$, па из правоуглог троугла $\triangle BES$ имамо $BE=a\cos\frac{\alpha}{2}$. Висину DE добијамо из Питагорине теореме за $\triangle BDE$: $DE=\sqrt{BE^2-BD^2}=a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$. Стога је $P_{\triangle BCE}=\dfrac{BC\cdot DE}{2}=\dfrac{a^2}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су то бројеви a, b, c. Тада је $2b = a + c$ и $b^4 = a^2c^2$. Ако квадрирамо прву једначину и искористимо да је $b^2 = |ac|$, добијамо $a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|$. Ако је $ac > 0$ добијамо $a^2 - 2ac + c^2 = 0$, па је $a = c$ и $a^2 = c^2$, дакле $q_1 = 1$. Ако је $ac < 0$ добијамо једнакост $a^2 + 6ac + c^2 = 0$, одакле је $\frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}$. Како је $\frac{c^2}{a^2} = q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$ и $q > 0$ (јер су квадрати), биће $q_{2,3} = 3 \pm \sqrt{8}$. Количник тог низа може бити $q_1 = 1$, $q_2 = 3 + \sqrt{8}$ или $q_3 = 3 - \sqrt{8}$.

2. Видети решење 2. задатка за трећи разред А категорије.

3. Видети решење 3. задатка за четврти разред А категорије.

4. Тражена гранична вредност је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4}$.

5. Из $\frac{1}{7}\arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ следи $\arccos x = (\frac{7}{2} + 14k)\pi$. Та релација није испуњена ни за једно $k \in \mathbb{Z}$ будући да важи
$(\frac{7}{2} - 14)\pi < 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi < \frac{7}{2}\pi$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Означимо са H ортоцентар троугла, са O центар описаног круга, са A' и C' подножја нормала из A и C на наспрамне странице BC и AB и са A_1 и B_1 средишта страница BC и AC. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Покажимо прво да је α оштар. Претпоставимо супротно.
1° Уколико би α био прав, тада би теме A истовремено било и ортоцентар, па би то било и пресек Ојлерове праве и странице AC (тј. $A \equiv H \equiv M$), што је немогуће јер M припада унутрашњости странице.
2° Уколико је α туп, тада је тачка H ван троугла $\triangle ABC$ (тј. имамо редослед тачака $A' - A - H$) и како Ојлерова права OH сече унутрашњости страница AC и BC имамо редослед $A' - N - C$, те је угао $\sphericalangle A'NH$ оштар, тј. угао $\sphericalangle CNH = \sphericalangle CNM$ је туп. Али то повлачи да је $CM > CN$ (јер је наспрам већег угла у троуглу $\triangle CNM$ већа страница), што је у супротности са условом задатка да је $CN = CM$.

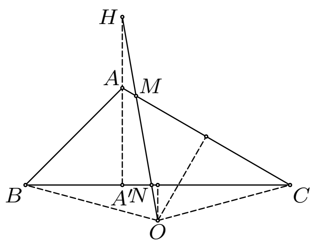
Тиме смо добили контрадикцију у оба случаја, те је угао α оштар. Аналогно се показује да и углови β и γ морају бити оштри, те је $\triangle ABC$ оштроугли и његовој унутрашњости се налази ортоцентар H.

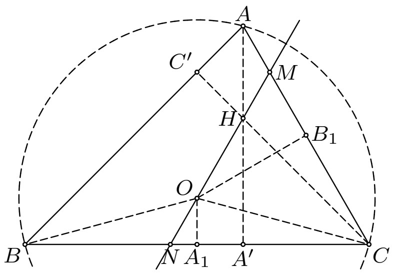
Сада из правоуглог троугла $\triangle ACC'$ добијамо $\sphericalangle ACC' = 90^\circ - \alpha$. Како је $\sphericalangle CAB$ периферијски угао над луком BC добијамо да је $\sphericalangle COA_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle COB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sphericalangle CAB = \alpha$, а одатле је $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OCA_1 = 90^\circ - \alpha$. Стога важи $\sphericalangle HCA = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle OCB$.

Из једнакокраког троугла $\triangle CNM$ имамо

$$CN = CM \;\Rightarrow\; \sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM.$$

Одатле следи подударност $\triangle HMC \cong \triangle ONC$ (усу: $\sphericalangle MCH = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle NCO$, $CM = CN$, $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM$), односно $HC = OC$. Сада имамо да је $\triangle HA'C \cong \triangle OB_1C$ (суу: $HC = OC$, $\sphericalangle HCA' = \sphericalangle HCO + 90^\circ - \alpha = \sphericalangle OCH + 90^\circ - \alpha = \sphericalangle OCB_1$, $\sphericalangle HA'C = 90^\circ = \sphericalangle OB_1C$) из чега следи $CA' = CB_1$. Но како је $\triangle AA'C$ правоугли, а B_1 средиште хипотенузе (и центар описаног круга) те је $CB_1 = B_1A'$, дакле $\triangle A'CB_1$ је једнакостраничан, значи $\sphericalangle B_1CA' = \sphericalangle ACB = 60^\circ$.



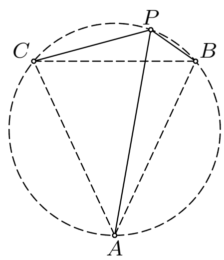


2. Претпоставимо да се тачка P налази на унутрашњости лука BC (који не садржи A). Тада је $PB + PC \geqslant BC$, док је PA веће или једнако мањој од две странице BA, CA: бар један од углова $\sphericalangle PBA$ и $\sphericalangle PCA$ није оштар, без умањења општости можемо узети да је то $\sphericalangle PBA$, и тада је PA највећа страница у $\triangle PBA$ (наспрам већег угла иде већа страница), тј. $PA > BA$. Према томе, збир $PA + PB + PC$ није мањи од збира неке две странице.

С друге стране, ако се P поклапа са теменом највећег угла троугла $\triangle ABC$, онда је $PA + PB + PC$ једнако збиру две најмање странице.

Следи да је тражена тачка P теме највећег угла (односно, једно од темена, ако је таквих више за случај једнакокраког или једнакостраничног троугла).

На основу претходног видимо да је посматрани збир строго већи за сваки други положај тачке P.

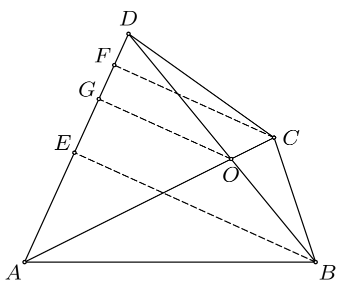


3. Докажимо да су бројеви x и y дељиви са 30, одакле ће следити тражено тврђење. Како $9 \mid x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy$ имамо $3 \mid (x-y)^2$, односно $3 \mid x - y$. Зато $3 \mid xy$, те како и $3 \mid x - y$, добијамо да $3 \mid x$ и $3 \mid y$. Пошто $10 \mid x^2 + xy + y^2 \mid x^3 - y^3$, то се бројеви x^3 и y^3 завршавају истом цифром, што је могуће само ако се и бројеви x и y завршавају истом цифром (ово треба проверити!). Отуда је $0 \equiv_{10} x^2 + xy + y^2 \equiv_{10} 3x^2$, па $10 \mid x$ и $10 \mid y$. Овим смо доказали да $30 \mid x$ и $30 \mid y$, те $900 \mid xy$.

4. _Решење 1:_ Из једнакости $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 18+2\cdot 9 = 36$, налазимо да је $|x+y+z| = 6$. Докажимо да су бројеви x, y и z истог знака, одакле ће следити да је $|x|+|y|+|z| = 6$. Како је $0 = 18-2\cdot 9 = x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx) = (x+y-z)^2-4xy$, то је $xy \geqslant 0$. Аналогно претходном добија се и $yz \geqslant 0$ и $zx \geqslant 0$. Из чињеница да је $xy \geqslant 0$, $yz \geqslant 0$ и $zx \geqslant 0$ закључујемо да су бројеви x, y и z истог знака (нулу можемо сматрати бројем са произвољним знаком), па је $|x|+|y|+|z| = 6$.
Решење 2: Из једнакости $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 18+2\cdot 9 = 36$, налазимо да је $|x+y+z| = 6$. Сада разликујемо следећа два случаја:
1° $x+y+z = 6$. Доказаћемо да су x, y и z ненегативни бројеви, одакле ће следити да је $|x|+|y|+|z| = 6$. Уколико би тачно један од бројева x, y и z био негативан, рецимо z, онда би имали да је $x^2+y^2 \geqslant \frac{(x+y)^2}{2} > \frac{6^2}{2} = 18$, што је немогуће. Ако би пак тачно два од бројева x, y и z били негативни, рецимо y и z, онда би било $x > 6$ и не би могло да важи $x^2+y^2+z^2 = 18$. Овим смо доказали да су бројеви x, y и z ненегативни (јасно је да због $x+y+z = 6$, не могу сва три да буду негативна).
2° $x+y+z = -6$. Нека је $x' = -x$, $y' = -y$ и $z' = -z$. Тада је $x'+y'+z' = 6$ и за бројеве x', y' и z' важи $x'^2+y'^2+z'^2 = 18$ и $x'y'+y'z'+z'x' = 9$, па из првог случаја закључујемо да је $|x'|+|y'|+|z'| = 6$. Зато је $|x|+|y|+|z| = |x'|+|y'|+|z'| = 6$.
На овај начин смо доказали да је под датим условима вредност израза $|x|+|y|+|z|$ једнака 6.

5. Ако је Ана записала све различите бројеве, она је записала 8 бројева из скупа $\{0,1,2,\ldots,7,8\}$. Значи сви Бранкови бројеви би морали бити међусобно једнаки (означимо их са b). Како и збир свих Аниних бројева и збир свих Бранкових бројева представља укупан број жетона на табли то су они међусобно једнаки, тј. $(\sum_{k=0}^{9} k) - b = 8\cdot b$, одакле налазимо да мора бити $b = 4$. Сада још остаје да конструишемо пример:

Б	4	4	4	4	4	4	4	4	
									0
								○	1
							○	○	2
						○	○	○	3
	○	○	○	○	○				5
	○	○	○	○	○	○			6
	○	○	○	○	○	○	○		7
	○	○	○	○	○	○	○	○	8
									A



Други разред – А категорија

1. Означимо са S_1, S_2, S_3 и S_4 редом површине троуглова AOB, BOC, COD и DOA. Означимо са p, q и r следеће површине: $p = S_{\triangle ABD} = S_1 + S_4 = \frac{1}{2}BE \cdot AD$, $q = S_{\triangle ACD} = S_3 + S_4 = \frac{1}{2}CF \cdot AD$, $r = S_4 = \frac{1}{2}OG \cdot AD$. Како је $S_2 = \dfrac{S_1S_3}{S_4}$ из претходних релација можемо изразити S_j преко p, q и r:

$$S_1 = p - r, \qquad S_3 = q - r, \qquad S_4 = r, \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{(p-r)(q-r)}{r}.$$

Сада добијамо да је површина четвороугла $ABCD$ једнака

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = p - r + \frac{(p-r)(q-r)}{r} + q - r + r = \frac{pq}{r}$$

одакле следи тврђење задатка: $S_{ABCD} = \dfrac{AD \cdot BE \cdot CF}{2OG}$.

2. Сва три корена су дефинисана када је $x \geqslant \frac{1}{2}$ (први за $x \geqslant \frac{1}{2}$, други $x \geqslant 6$ и трећи $x \geqslant 2$). Трансформишимо дату неједначину на облик

$$(1)\ \sqrt{2x-1} - 3 \geqslant \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} > 0,$$

јер је $x + 6 > x + 2$. Да би ова неједначина имала решења потребно је и да лева страна буде позитивна, тј. $\sqrt{2x-1} - 3 > 0$, што нам даје $x > 5$. Како су обе стране неједначине (1) позитивне, можемо је квадрирати, те добијамо

$$\sqrt{(x+2)(x+6)} \geqslant 3\sqrt{2x-1}.$$

Како су и у овој неједначини обе стране позитивне опет можемо квадрирати те добијамо квадратну неједначину $x^2 - 10x + 21 \geqslant 0$. Њено решење је $x \in (-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$, што са свим претходним условима даје коначно решење $x \in [7, +\infty)$.

3. Нека је $S(x,y) = x^2 + y^2 + 12x - 16y$. Како је

$$S(x,y) = 2(x+3)^2 + 2(y-4)^2 - (x^2+y^2) - 50 \geqslant -75,$$

то је најмања вредност датог израза једнака -75 и достиже се за $x = -3$ и $y = 4$.

Из неједнакости $S(x,y) + S(-x,-y) = 2(x^2+y^2) \leqslant 50$, а на основу тога што је $S(-x,-y) \geqslant -75$, налазимо да важи

$$S(x,y) \leqslant 50 - S(-x,-y) \leqslant 50 - (-75) = 125.$$

Отуда је највећа вредност датог израза једнака 125 и достиже се за $x = 3$ и $y = -4$.

4. Ови бројеви су једнаки јер је $\log 2^{\sqrt{\log_2 2004}} = \sqrt{\log_2 2004} \cdot \log 2 = \dfrac{\sqrt{\log 2004}}{\sqrt{\log 2}} \cdot \log 2 = \sqrt{\log 2004 \cdot \log 2}$ и $\log 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}} = \sqrt{\log_{2004} 2} \cdot \log 2004 = \dfrac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 2004}} \cdot \log 2004 = \sqrt{\log 2 \cdot \log 2004}$.

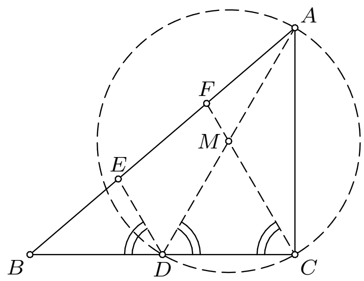
5. Доказаћемо општије тврђење да за свако k постоје индекси i и j такви да је испуњена једнакост $x_i - x_j = k$.

Претпоставимо супротно и поделимо скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 2k-1, 2k\}$ у k парова

бројева $\{(1,k+1),(2,k+2),\ldots,(k,2k)\}$. Тада се у сваком пару налази највише један члан низа $\{x_n\}$, па се у скупу $\{1,2,3,\ldots,2k-1,2k\}$ налази највише k бројева из низа. Ово је контрадикција са чињеницом да је $x_{k+1} \leqslant 2k$.
Тиме смо показали да за свако $k \in \mathbb{N}$ (па и $k = 2005$) постоје индекси i и j такви да је испуњена једнакост $x_i - x_j = k$.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је F средиште дужи AE. Тада је $BE = EF = FA$. Како је и $BD = DC$, праве ED и FC су паралелне, па по Талесовој теореми CF полови AD. Означимо са M средиште AD. Из услова задатка је $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BDE = \sphericalangle ADC$, па добијамо да је троугао $\triangle MCD$ једнакокрак, тј. $MC = MD = MA$. Дакле, C је на полукругу над пречником AD, тј. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = 90°$.



2. Претпоставимо да су k и l природни бројеви такви да је $ab+1 = (ka+1)^2$ и $ac+1 = (la+1)^2$. Тада је $b = k(ka+2)$ и $c = l(la+2)$, па је $bc+1 = (kla)^2 + 2kl(k+l)a + 4kl + 1 = (kla+k+l)^2 + 1 - (k-l)^2$.
Ако ставимо $l = k+1$, тада је $bc+1$ потпун квадрат. Према томе,

$$(b,c) = \big(k(ka+2), (k+1)((k+1)a+2)\big)$$

задовољава услов задатка за сваки природан број k.

3. Из синусне теореме је $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin C$, па је дата неједнакост еквивалентна са $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta \leqslant \sin\gamma$, тј. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leqslant 2\sin\gamma$. Међутим,

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\beta &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2\sin(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta)\\ &= 2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta) \leqslant 2\sin\gamma.\end{aligned}$$

Једнакост важи када је $\cos(\alpha-\beta) = 1$, односно за једнакокраки троугао, код кога је $\alpha = \beta$.

4. Означимо дати израз са I. Тада је $I = \dfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2\Big)$.

Користимо неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског и добијамо: $(1^2 + 2^2 +$

$\ldots + n^2) \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2) \geqslant 1 \cdot (x_1 - x_2) + 2 \cdot (x_2 - x_3) + 3 \cdot (x_3 - x_4) + \ldots +$ $(n-1) \cdot (x_{n-1} - x_n) + n \cdot x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, те је минимална вредност израза I једнака

$$I_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \frac{3}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Остаје да нађемо за које x_i се она добија. Знак једнакости у неједнакости К-Ш-Б важи када су одговарајући елементи пропорционални, тј. кад је

$$\frac{x_1 - x_2}{1} = \frac{x_2 - x_3}{2} = \frac{x_3 - x_4}{3} = \ldots = \frac{x_{n-1} - x_n}{n-1} = \frac{x_n}{n} = \alpha.$$

Одавде налазимо

$$x_n = n\alpha, x_{n-1} - x_n = (n-1)\alpha, \ldots, x_{k-1} - x_k = (k-1)\alpha, \ldots, x_1 - x_2 = 1 \cdot \alpha.$$

Сабирањем првих $(n+1-k)$ једначина добијамо $x_k = [n + (n-1) + \ldots + k]\alpha =$ $\left[\sum\limits_{i=1}^{n} i - \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\right] \alpha = \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}\right] \alpha.$

Сада α добијамо из једнакости

$$1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \left[n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\right] \alpha$$

$= \left[\frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}\right] \alpha$, одакле је:

$\alpha = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$. Коначно имамо

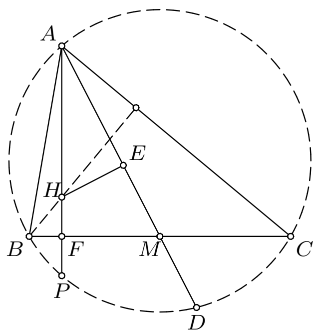
$$x_k = 3 \cdot \left[\frac{n(n+1) - (k-1)k}{n(n+1)(2n+1)}\right] = \frac{6\sum\limits_{j=k}^{n} j}{n(n+1)(2n+1)}.$$

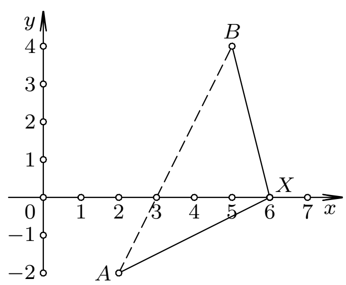
5. Пречник траженог круга не може бити мањи од растојања прозвољне две од датих тачака, па и две најудаљеније. Ако дате тачке формирају тупоугли или правоугли троугао, или су колинеарне, овај круг садржи и преосталу тачку датог скупа, па је круг код кога је пречник дуж која спаја најудаљеније од те три тачке тражени круг.

Код оштроуглог троугла тражени круг је круг описан око тог троугла (нека је његов центар O, а полупречник R). Да би ово показали претпоставимо супротно, да је тражени круг полупречника $x < R$. Ако круг полупречника x покрива троугао онда би и три круга полупречника x са центрима у теменима круга покривали цео троугао. Како то није тачно (јер је O на растојању $R > x$ од темена, та тачка би остала непокривена), следи да је тражени круг круг описан око датог оштроуглог троугла.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је F подножје нормале из A на BC и нека је P пресек AH са описаним кругом око троугла $\triangle ABC$. Довољно је доказати да је четвороугао тетиван, због $\sphericalangle HEM + \sphericalangle HFM = 180^\circ$. Показаћемо да је $AE \cdot AM = AH \cdot AF$, одакле следи да су тачке H, E, F, M коцикличне.
$AE \cdot AM = (AM - MD) \cdot AM = (AM - ME) \cdot AM = AM^2 - MD \cdot AM$, где смо користили да је $ME = MD$ (из услова задатка). Даље, због потенције тачака M и F у односу на круг описан око $\triangle ABC$ и Питагорине теореме примењене на правоугли троугао $\triangle AMF$ добијамо: $AE \cdot AM = AM^2 - MB \cdot MC = AF^2 + FM^2 - MB^2 = AF^2 + (FM - MB) \cdot (FM + MB) = AF^2 - BF \cdot FC = AF^2 - AF \cdot FP = AF \cdot (AF - FP) = AF \cdot AH$, због познате чињенице да је $HF = FP$, јер су троуглови $\triangle BCH$ и $\triangle BCP$ подударни са заједничком страницом и једнаким угловима.





2. _Решење 1:_ Функцију f можемо представити у облику

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (-2)^2} + \sqrt{(5-x)^2 + 4^2}.$$

Тада видимо да функција f представља збир растојања од тачака $A(2, -2)$ и $B(5, 4)$ до тачке $X(x, 0)$. Ово растојање је минимално када тачка X припада дужи AB (због неједнакости троугла) и то је испуњено за $x = 3$. Минимум функције је $f_{\min} = f(3) = 3\sqrt{5}$.
Решење 2: Како је

$$f'(x) = \frac{(x-5)\sqrt{x^2 - 4x + 8} + (x-2)\sqrt{x^2 - 10x + 41}}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 41}}$$

$f'(x) = 0$ кад је $(x-2)\sqrt{x^2 - 10x + 41} = (5-x)\sqrt{x^2 - 4x + 8}$. Обе стране претходне неједнакости су истог знака само уколико је $x \in (2, 5)$! Тек сада смемо да квадрирамо претходну једнакост. Након сређивања добијамо $12 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$ и њена решења су $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$ (али ово отпада јер $x_2 \notin (2, 5)$). Испитивањем знака квадратне једначине добијамо да је $f'(x) < 0$ за $x \in (2, 3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (3, 5)$, што са $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 2]$ и $f'(x) > 0$

за $x \in [5, +\infty)$, коначно даје $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 3)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (3, +\infty)$. Стога за $x = 3$ имамо минимум и $f_{\min} = f(3) = 3\sqrt{5}$.

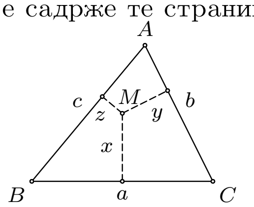
3. <u>Решење 1:</u> Све операције радимо по модулу 1000. $3^{2005} \equiv 3 \cdot 3^{2004} = 3 \cdot (10-1)^{1002} = 3 \cdot (\binom{1002}{0}10^{1002}(-1)^0 + \ldots + \binom{1002}{999}10^3(-1)^{999} +$
$\binom{1002}{1000}10^2(-1)^{1000} + \binom{1002}{1001}10^1(-1)^{1001} + \binom{1002}{1002}10^0(-1)^{1002}) \equiv$
$3 \cdot (\binom{1002}{1000}10^2(-1)^{1000} + \binom{1002}{1001}10^1(-1)^{1001} + \binom{1002}{1002}10^0(-1)^{1002}) =$
$3 \cdot (\frac{1002 \cdot 1001}{2} \cdot 100 - 1002 \cdot 10 + 1) \equiv 3 \cdot (100 - 20 + 1) = 243.$

<u>Решење 2:</u> Према Ојлеровој теореми имамо да је

$$3^{\varphi(1000)} = 3^{400} \equiv 1 \pmod{1000},$$

те је $3^{2005} = \left(3^{400}\right)^5 \cdot 3^5 \equiv 1^5 \cdot 3^5 = 243 \pmod{1000}$.

4. Нека су дужине страница троугла редом a, b и c, а растојања произвољне тачке троугла до правих које садрже те странице редом x, y и z.



Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског је

$$ax + by + cz \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

па је $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{2P}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, тј. $x^2+y^2+z^2 \geqslant \dfrac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}$, где је P површина троугла ABC.

Једнакост важи акко $a : b : c = x : y : z$. Конструишимо тачку M унутар троугла ABC која задовољава овај услов. Нека је N тачка угла $\sphericalangle ACB$ удаљена a од BC и b од AC. Свака тачка K полуправе CN задовољава очигледно $x(K) : y(K) = a : b$. Обратно, тачка K овог угла која ово задовољава припада полуправој CN. У супротном права кроз K паралелна BC секла би CN у L, па из $x(L) = x(K)$ следи $y(L) = y(K)$ и одатле контрадикција $BC \parallel AC$. Дакле полуправа CN је скуп тачака угла $\sphericalangle ACB$ за који важи $x : y = a : b$. Слично, скуп тачака угла $\sphericalangle CAB$ за које је $y : z = b : c$ је полуправа с врхом A. Те две полуправе секу се у тачки M унутар трогла, за коју је $x : z = \dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z} = \dfrac{a}{b}\dfrac{b}{c} = a : c$. Тачка M зато задовољава услов, те је она тражена тачка за коју је збир квадрата растојања до правих које садрже странице троугла $\triangle ABC$ минималан.

5. Могуће је.

Првих неколико бројева ставимо у A (први скуп), наредних неколико у B (други), па опет неколико у A итд. Пустимо да број узастопних природних бројева у тим скуповима неограничено расте.

Један могући пример је:

$$A = \{n \mid (2k)^2 < n \leqslant (2k+1)^2, k \in \mathbb{N}_0\}$$

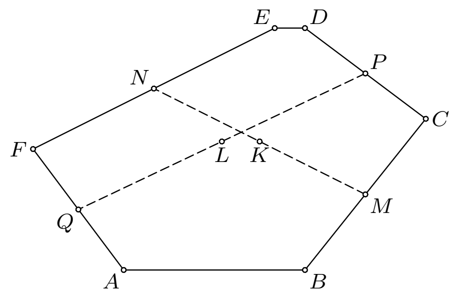
$$B = \{n \mid (2k+1)^2 < n \leqslant (2k+2)^2, k \in \mathbb{N}_0\},$$

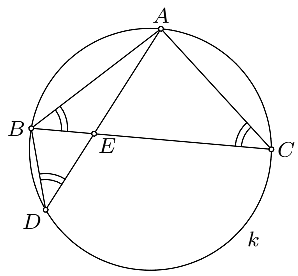
односно $A = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 18, \dots\}$, $B = \{2, 3, 4, 10, 11, \dots\}$.

Тада не може бити ни једне аритметичке прогресије. Претпоставимо супротно да нпр. A садржи бесконачну аритметичку прогресију $\{a_i\}$ са разликом чланова d и првим чланом a_1. Али тада постоји $j \in \mathbb{N}$, такав да за број $a_j = a_1 + (j-1)d$ важи $(2d+1)^2 < a_j \leqslant (2d+2)^2$ (међу ових $2d+3$ узастопних природних бројева постоји број који даје исти остатак при дељењу са d као и a_1), односно важи $a_j \in B$, што је у супротности са претпоставком да су сви чланови аритметичке прогресије $\{a_i\}$ у A.

Први разред – Б категорија

1. Нека је O произвољна тачка. Тада је $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})\big) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$ и слично $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA})$, па је $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL}$ ако и само ако је $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$, тј. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}$, односно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, што је и требало доказати.





2. Како је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$, то су у троугловима $\triangle ABE$ и $\triangle ABD$ два угла једнака одговарајућим угловима, па и за трећи пар углова $\sphericalangle BEA$ и $\sphericalangle ABD$ важи да су једнаки.

3. Видети решење 3. задатка за први разред А категорије.

4. Означимо $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \alpha \in \mathbb{Q}$. Одавде је $\sqrt{a} - \alpha\sqrt{b} = \alpha\sqrt{3} - \sqrt{2}$, па се квадрирањем добија $a + \alpha^2 b - 2\alpha\sqrt{ab} = 3\alpha^2 - 2 - 2\alpha\sqrt{6}$, тј. $\sqrt{ab} = \beta + \sqrt{6}$, где је $\beta \in \mathbb{Q}$. Након још једног квадрирања имамо $ab = \beta^2 + 6 + 2\beta\sqrt{6}$, па је $\beta = 0$ и $ab = 6$. Постоје 4 могућности.

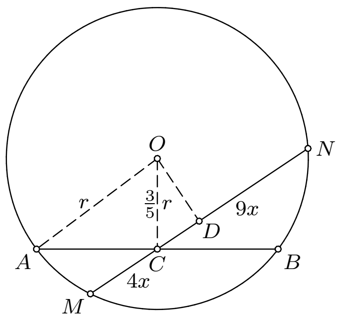
1° $a = 1, b = 6$: $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \notin \mathbb{Q}$; $\qquad 2^\circ$ $a = 2, b = 3$: $\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \notin \mathbb{Q}$;

3° $a=3, b=2$: $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$; $\quad 4^\circ$ $a=6, b=1$: $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Дакле, $a=3$ и $b=2$.

5. Видети решење 5. задатка за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Из троугла $\triangle AOC$, помоћу Питагорине теореме, добијамо да је $AC = \dfrac{4}{5}r$, а из сличности троуглова $\triangle ACM$ и $\triangle NCB$ имамо $AC \cdot CB = MC \cdot CN$, тј. $\dfrac{16}{25}r^2 = 36x^2$, па је $x = \dfrac{2}{15}r$. Нека је D средиште тетиве MN. Како је $MD = \dfrac{13}{2}x$, то је $CD = MD - MC = \dfrac{5}{2}x = \dfrac{r}{3}$. Коначно, налазимо $\sin\sphericalangle ACM = \cos\sphericalangle OCD = \dfrac{r}{3} : \dfrac{3r}{5} = \dfrac{5}{9}$.



2. Сва три корена су дефинисана када је $x \geqslant \frac{1}{2}$ (први за $x \geqslant \frac{1}{2}$, други $x \geqslant 6$ и трећи $x \geqslant 2$). Како је $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} > 0$ (јер је $x+6 > x+2$), да би ова неједначина имала решења потребно је и да лева страна буде позитивна, тј. $\sqrt{2x-1} - 3 > 0$, што нам даје $x > 5$. Сада, како имамо да су обе стране полазне једначине позитивне, можемо је квадрирати, те добијамо $\sqrt{(x+2)(x+6)} = 3\sqrt{2x-1}$. Како су и у овој једначини обе стране позитивне опет можемо квадрирати те добијамо квадратну једначину $x^2 - 10x + 21 = 0$. Њена решења су $x=3$ и $x=7$, што са свим претходним условима даје само једно решење $x=7$.

3. *Решење 1*: Дату једначину ћемо решавати као квадратну једначину: $z_{1,2} = \dfrac{3+2i \pm \sqrt{(3+2i)^2 - 4(5+i)}}{2} = \dfrac{3+2i \pm \sqrt{-15+8i}}{2}$. Корен $u = x+iy$ из $-15+8i$ ћемо извадити тако што ћемо решавати једначину $(x+iy)^2 = -15+8$. Њен имагинарни део је $2xy = 8$, односно $y = \dfrac{4}{x}$, што кад убацимо у њен реални део $x^2 - y^2 = -15$ даје $\dfrac{x^4 + 15x^2 - 16}{x^2} = 0$. Биквадратна једначина

$x^4+15x^2-16=0$ се решава сменом $t=x^2$. Решења једначине $t^2+15t-16=0$ су $t=-16$ (које отпада јер је $x\in\mathbb{R}$, па је $t=x^2\geqslant 0$) и $t=1$, које даје два решења $x_1=1$ (тад је $y_1=4$, па је $u_1=1+4i$) и $x_2=-1$ (тад је $y_2=-4$, па је $u_2=-1-4i$). Одавде добијамо решења дате једначине $z_1=2+3i$ и $z_2=1-i$.

<u>*Решење 2*</u>: Исто као и у претходном решењу задатка долазимо до $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{-15+8i}}{2}$. Када трансформишемо поткорени израз добијамо: $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{1+2\cdot 1\cdot 4i+(-16)}}{2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{(1+4i)^2}}{2}$, тј. $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm(1+4i)}{2}$, одакле добијамо два решења дате једначине $z_1=2+3i$ и $z_2=1-i$.

<u>*Решење 3 – за 3. разред*</u>: Исто као и у претходна два решења долазимо до $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm\sqrt{-15+8i}}{2}$. Извадимо корен u из $-15+8i$ стандардним поступком: лако добијамо да је $|-15+8i|=17$, као и $\operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{8}{15}$ (обратите пажњу да је аргумент φ у II квадранту, па ће $\dfrac{\varphi}{2}$ бити у I квадранту!), али сада морамо да употребимо доста тригонометријских трансформација: $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$ (од знака $\pm$ узимамо $+$ јер је $\dfrac{\varphi}{2}$ у I квадранту), $\cos\varphi=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ (од знака $\pm$ узимамо $-$ јер је φ у II квадранту). Из ове две формуле добијамо да је $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}+1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}-1}}=4$. Сада из чињеница да је $|u|=\sqrt{17}$ и $\operatorname{tg}\arg u=4$ добијамо да је $u=1+4i$. Када то убацимо у формулу за решења квадратне једначине добијамо $z_{1,2}=\dfrac{3+2i\pm(1+4i)}{2}$. Тражена решења дате једначине су: $z_1=2+3i$ и $z_2=1-i$.

<u>*Решење 4*</u>: Задатак се може урадити и директном заменом $z=a+ib$. Када заменимо у полазну једначину имагинарни део нам даје $2ab-2a-3b+1=0$, тј. $b=\dfrac{2a-1}{2a-3}$, што кад заменимо у реални део $a^2-b^2-3a+2b+5=0$ добијамо једначину $\dfrac{4a^4-24a^3+69a^2-99a+50}{(2a-3)^2}=0$. Када факторишемо полином $4a^4-24a^3+69a^2-99a+50$ добијамо $(a-1)(a-2)(4a^2-12a+25)$ и како је дискриминантна квадратног тринома $D=-256<0$ имамо да је $4a^2-12a+25>0$ за свако a, те добијамо да су једина решења $a_1=1$ и $a_2=2$, што нам даје решења $z_1=1-i$ и $z_2=2+3i$.

4. Видети први део решења 3. задатка за други разред A категорије.

5. Видети решење 5. задатка за први разред A категорије.

Трећи разред – Б категорија

1. Квадрирамо све три релације, а затим их саберемо (водећи рачуна да за сваки вектор важи $|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x}$). Добија се

$$3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) < 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}),$$

па би важило $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 < 0$, што је немогуће.

2. Вредности одговарајућих детерминанти су:

$$\Delta = \beta(\alpha - 1),\ \Delta_x = \beta^2(\alpha - 1),\ \Delta_y = \alpha\beta(\alpha - 1) \text{ и } \Delta_z = \beta(\alpha - 1).$$

1° за $\alpha \neq 1, \beta \neq 0$ систем има јединствено решење $x = \beta, y = \alpha, z = 1$.
У наредна два случаја су све детерминанте једнаке 0 и онда не знамо да ли ситем има вишеструко решење или нема решења. То морамо установити Гаусовим системом елиминације.

2° за $\beta = 0$ добија се систем $\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha^2+1 \\ x & + & y & & & = & \alpha \end{array}$,

који има вишеструко решење $x = t, y = \alpha - t, z = \alpha t - t + 1,\ t \in \mathbb{R}$.

3° за $\alpha = 1$ добија се систем $\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \beta z & = & 1+2\beta \\ x & + & y & + & z & = & 2+\beta \\ x & + & y & + & 2\beta z & = & 1+3\beta \end{array}$,

који има вишеструко решење $x = t, y = \beta + 1 - t, z = 1,\ t \in \mathbb{R}$.

Напомена: Ми смо у 2° и 3° узели да је x слободна променљива и доделили јој вредност параметра: $x = t,\ t \in \mathbb{R}$. Могуће је и доделити и било којој другој променљивој вредност параметра и тад се добија исто решење, само мало другачије записано.

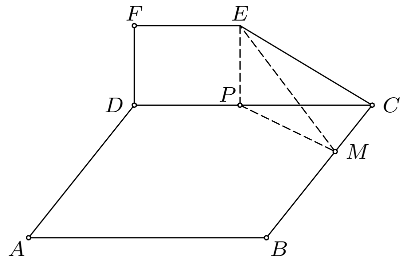
3. Видети решење 3. задатка за трећи разред А категорије.

4. Видети решење 4. задатка за други разред А категорије.

5. Нека је EP висина трапеза и M подножје нормале из тачке P на BC. По Теореми о три нормале важи $EM \perp BC$. Из правоуглих троуглова $\triangle CPM$, $\triangle ECM$ и $\triangle ECP$ добијамо

$$\cos\sphericalangle BCD = \cos\sphericalangle MCP = \frac{CM}{CP} = \frac{CM}{CE}\cdot\frac{CE}{CP} = \frac{\cos\sphericalangle MCE}{\cos\sphericalangle PCE},$$

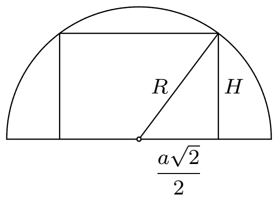
односно $\cos\sphericalangle BCD = \dfrac{\cos\sphericalangle BCE}{\cos\sphericalangle DCE} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$, јер је $\sin\sphericalangle DCE = \dfrac{DE}{CE} = \dfrac{DF}{CE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је $\cos\sphericalangle DCE = \dfrac{1}{2}$. Сада налазимо висину ромба $h = a\cdot\sin\sphericalangle BCD = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$, па је $r = \dfrac{h}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{6}$ и $\dfrac{a}{r} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

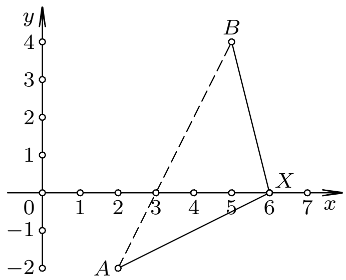


Четврти разред – Б категорија

1. Остаци при дељењу са 7 бројева 2^n су 1, 2 или 4, а остаци при дељењу са 7 бројева n^2 су 0, 1, 2 или 4. Дакле, број $2^n + n^2$ не може бити дељив са 7.

2. Означимо са H тражену висину призме, а са a страницу основе призме. Ако се постави раван кроз дијагоналу призме нормално на раван основе, у пресеку се добија правоугаоник страница $a\sqrt{2}$ и H уписан у полукруг полупречника R. Тада је $\dfrac{a^2}{2} = R^2 - H^2$, па је $V = a^2H = 2(R^2H - H^3)$ и $V' = 2(R^2 - 3H^2)$. За $H < \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ биће $V' > 0$, а за $H > \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ биће $V' < 0$, па је запремина призме максимална када је $H = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.





3. Видети решење 3. задатка за четврти разред А категорије.

4. Како је $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{9n+5}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} > 0$, низ је растући.

5. Нека је $z = x + iy$. Из $\left|\dfrac{x+(y-1)i}{x+(y-2)i}\right| = \dfrac{1}{2}$ добијамо $\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-2)^2}$, те након квадрирања $3x^2 + 3y^2 - 4y = 0$, односно $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Од свих комплексних бројева на овом кругу највећи модуо има број $z_0 = \dfrac{4}{3}i$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

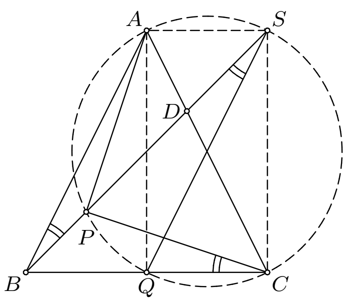
Први разред – А категорија

1. Нека су a, c, b, c странице трапеза, при чему је b мања, а a већа основица, а c су кракови. Како је $a < c + b + c$ добијамо $a < \dfrac{2c + a + b}{2} = \frac{2005}{2}$. За фиксирано a из скупа $\{1, 2, \ldots, 1002\}$, можемо узети било које b мање од a и различите парности од a, што даје $\left[\dfrac{a}{2}\right]$ могућих избора (тада је c једнозначно одређено, а самим тим и једнакокраки трапез је једнозначно одређен дужинама својих страница.).

Тражени број трапеза је једнак

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{1002}\left[\frac{a}{2}\right] &= 0+1+1+2+2+\ldots+499+499+500+500+501\\ &= 2\cdot\frac{500\cdot 501}{2}+501 = 501^2 = 251\,001.\end{aligned}$$

2. Нека је Q средина странице BC и S тачка таква да је $AQCS$ правоугаоник. Сада је $AS = QC = BQ$ и $AS \parallel QC$. Из односа страница $BC : CD = AS : AD = 2 : 1$ и једнакости углова $\sphericalangle BCD = \sphericalangle SAD$, закључујемо да су троуглови $\triangle BDC$ и $\triangle SDA$ слични, односно да су B, D и S колинеарне. Због $\sphericalangle APC = \sphericalangle AQC = \sphericalangle ASC = 90^\circ$ имамо да су тачке A, P, Q, C, S на истом кругу (то је круг над пречником AC). Из паралелограма $ABQS$ имамо да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BSQ$, а $\sphericalangle PSQ = \sphericalangle PCQ$, као углови над тетивом PQ. Из последње две једнакости добијамо $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCB$.



3. Нека је k произвољна кружница полупречника 4 и нека су M_1 и M_2 две дијаметрално супротне тачке те кружнице, различите од тачака A_i. Тада на основу неједнакости троугла имамо $8 = M_1M_2 \leqslant M_1A_i + M_2A_i$, за $i = 1, 2, \ldots, 501$. Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$4008 \leqslant (M_1A_1 + M_1A_2 + \ldots + M_1A_{501}) + (M_2A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_2A_{501}).$$

Одатле следи да је бар један од израза у заградама већи или једнак 2004. Према томе за једну од тачака M_1, M_2 је тачно тврђење задатка.

4. <u>*Решење 1*</u>: Из неједнакости А-Г средине имамо $\frac{a^2+1}{2} \geqslant a$, одакле је $a(b^2+1) \leqslant \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}$. Аналогно се добија и $b(a^2+1) \leqslant \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{2}$, одакле директно следи тражена неједнакост.

<u>*Решење 2*</u>: Пођимо од очигледне неједнакости: $(ab-b)^2+(ab-a)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geqslant 0$, одакле се развијањем добија: $1+a^2+b^2+a^2b^2 \geqslant a+ab^2+b+ba^2$, одакле следи тврђење задатка.

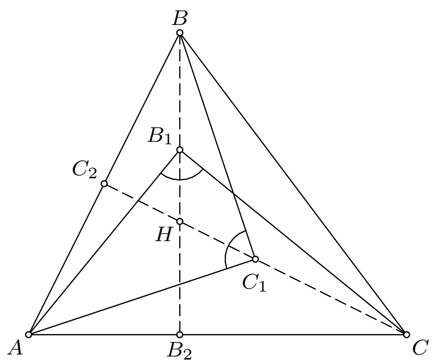
5. Довољно је приметити да се при замени позитивних бројева a и b бројем $\frac{a+b}{4}$ збир реципрочних вредности свих написаних бројева не повећава, јер из неједнакости аритметичке и хармонијске средине добијамо $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$.

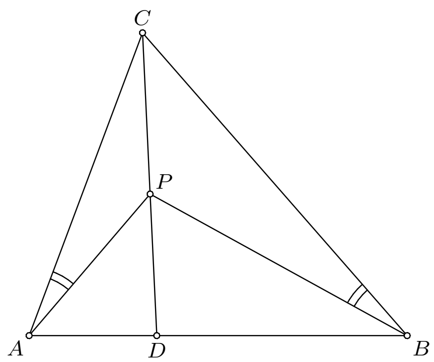
<u>*Напомена*</u>: Може се показати да како год брисали бројеве и записивали нове, не можемо доћи до броја $\frac{1}{2005}$.

Други разред – А категорија

1. Дата једнакост је еквивалентна са $c(a+b)=ab$. Нека је $e = \text{НЗД}(a,b)$, $a = ep$ и $b = eq$. Добијамо $c(p+q) = epq$, при чему су p и q узајамно прости, па је $\text{НЗД}(p+q, pq) = 1$. Следи да $p+q \mid e$. Ако ставимо $e = t(p+q)$, добијамо $a = tp(p+q)$, $b = tq(p+q)$, $c = tpq$. Будући да је $\text{НЗД}(pq, p(p+q), q(p+q)) = 1$, следи да је $d = t$. Сада је $abcd = t^4p^2q^2(p+q)^2$.

2. Означимо са B_2 и C_2 подножја висина из B и C на наспрамне странице. Тада имамо следеће сличности: $\triangle AB_1C \sim \triangle AB_2B_1$, $\triangle ABB_2 \sim \triangle ACC_2$, $\triangle AC_1B \sim \triangle AC_2C_1$. Одатле добијамо $AB_1{}^2 = AB_2 \cdot AC = AC_2 \cdot AB = AC_1{}^2$, односно $AB_1 = AC_1$.





3. Означимо углове троугла код темена A, B, C редом α, β, γ, и означимо $x = \sphericalangle PAC$ и $u = \sphericalangle ACP$, $v = \sphericalangle BCP$. На основу синусних теорема у троугловима $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ имамо $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AD}{CD} \cdot \dfrac{CD}{DB} = \dfrac{\sin u \sin \beta}{\sin \alpha \sin v}$. С друге стране, имамо

$$\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{\sin u}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin v} = \frac{AP}{CP} \cdot \frac{CP}{BP} = \frac{AP}{BP} = \frac{\sin(\beta - x)}{\sin(\alpha - x)} < \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

при чему последња неједнакост важи јер је еквивалентна (након свођења на заједнички именилац и коришћења адиционе формуле) са $\sin \alpha \cos \beta \sin x > \sin \beta \cos \alpha \sin x$, тј. са $\sin(\alpha - \beta) > 0$. Према томе,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin u}{\sin v} < \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} = \frac{AC^2}{CB^2}.$$

4. Прво одмах можемо приметити да графици оваква 2 квадратна полинома могу имати или 0 или 1 тачку пресека, или би се евентуално поклапали (обзиром да им је најстарији коефицијент исти, тј. 1, $f(x) = P_1(x) - P_2(x)$ је линеарна функција, тј. права). Означимо са x_0 ту тачку у којој евентуално важи $P_1(x_0) = P_2(x_0)$. Лако се добије да је $x_0 = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$. Ако би било $a_1 = a_2$, тада графици не би имали пресек (или би се евентуално поклапали, ако $b_1 = b_2$), но тај случај нам није ни интересантан, јер тада ни не важи дата почетна неједнакост. Остаје да израчунамо $P_1(x_0)$, што после краћег рачуна примећујемо да је $P_1(x_0) < 0$ еквивалентно управо полазној неједнакости (заправо то је управо дата неједнакост само помножена са $\dfrac{1}{(a_1 - a_2)^2}$, које је свакако позитивно, па се неће променити смер неједнакости) . А како је коефицијент уз x^2 позитиван, јасно је да ће оба ова полинома имати по две реалне нуле (и то по једну већу од x_0, а једну мању од x_0). Означимо их редом x_{11} и x_{12} ($x_{11} < x_{12}$), за први, односно x_{21} и x_{22} ($x_{21} < x_{22}$), за други. Јасно мора бити $x_{11} < x_{21} < x_{12} < x_{22}$, или $x_{21} < x_{11} < x_{22} < x_{12}$, (тј. немогуће је да су оба корена једног између оба корена другог јер би у противном имали нпр. $x_{11} < x_0 < x_{12}$, $f(x_0) = 0$ док би $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ били истог знака, што није могуће, јер је график $f(x) = P_1(x) - P_2(x)$ права, како смо на почетку уочили.

5. Да би производ био непаран потребно је да су сви фактори непарни бројеви.
1° случај: *n је непаран број.* У овом случају је то немогуће.
<u>I начин</u> Како је n непарно и сви чиниоци непарни то је и збир тих чинилаца непаран. Међутим, тај збир је $(\pi_1 - 1) + (\pi_2 - 2) + \cdots + (\pi_n - n) = (\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n) - (1 + 2 + \cdots + n) = 0$.
<u>II начин</u> $n = 2k + 1$. Тада међу бројевима $1, 2, \ldots, n$ (па и међу бројевима $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$) има $k + 1$ непарних и k парних. Међу бројевима $\pi_i - i$ мора бити бар један паран, јер се бар једном мора десити да су и i и π_i непарни (Дирихлеов принцип).
2° случај: *n је паран број.* $n = 2k$. Сваки од бројева π_{2i} мора бити непаран, а

сваки од π_{2i+1} паран. Стога бројеви $(\pi_1, \pi_3, \ldots, \pi_{2k-1})$ чине једну пермутацију скупа $\{2, 4, \ldots, 2k\}$, а бројеви $(\pi_2, \pi_4, \ldots, \pi_{2k})$ чине једну пермутацију скупа $\{1, 3, \ldots, 2k-1\}$.

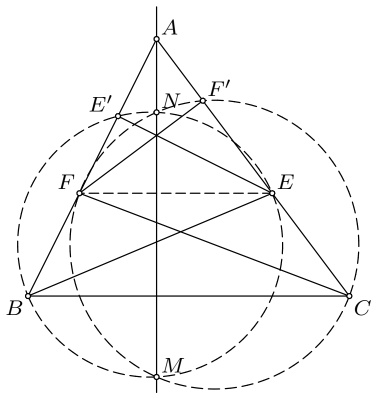
Таквих пермутација има $k! \cdot k! = \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2$. Укупан одговор је $n!$ ако је n непаран број, односно $n! - \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2$ ако је n паран.

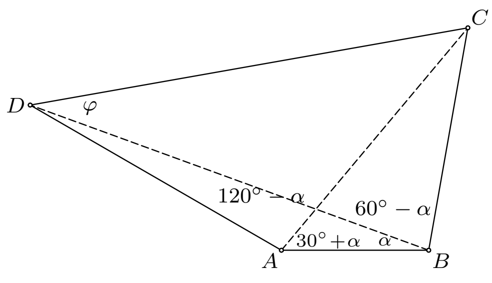
(Укупан одговор је 0 ако је n непаран број, односно $\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2$ ако је n паран.)

Трећи разред – А категорија

1. Претпоставимо да $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ задовољава услове задатка. Очигледно n не може бити једнако 10^k, па зато важи $10^k + 1 \leqslant n$. Посматрајмо број $m = (10^k + 1)n$. Последњих k цифара броја m су једнаке редом $a_{k-1}, \ldots, a_0$. Преостале цифре чине број $x = \overline{a_k \ldots a_1 a_0} + a_k$. Међутим, збир цифара броја x по услову задатка мора бити једнак a_k. Ако је прва цифра броја x једнака a_k или $a_k + 1$, то није могуће. Према томе, број x мора бити облика $\overline{1000\ldots0a}$, при чему је цифра a једнака $a_k - 1$. Тада је очигледно $a_k = 9$, одакле лако добијамо $n = \overline{999\ldots9}$. Заиста, ови бројеви задовољавају услов задатка.

2. Означимо са F' и E' подножја нормала из F и E на странице AC и AB. Пошто је $FEF'E'$ тетиван закључујемо да је $AF' \cdot AE = AE' \cdot AF$. Користећи и $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB}$, добијамо да је $AF' \cdot AC = AF' \cdot AE \cdot \dfrac{AC}{AE} = AE' \cdot AF \cdot \dfrac{AB}{AF} = AE' \cdot AB$ одакле закључујемо да тачка A припада радикалној оси кругова са пречницима BE и CF, што одмах имплицира да су тачке A, M и N колинеарне при чему су M и N пресечне тачке ових кругова. Још остаје да приметимо да је заједничка тетива MN нормална на праву која спаја центре датих кругова, тј. на средњу линију трапеза $BCEF$ а самим тим и на BC. Овиме је тврђење у потпуности доказано.





3. Нека је $\sphericalangle ABD = \alpha$ и $\sphericalangle BDC = \varphi$. Тада је $\sphericalangle DAC = 120^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BAD = 150^\circ - (120^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$, $\sphericalangle BDA = 30^\circ - \alpha$, $\sphericalangle DBC = 60^\circ + \alpha$. Из синусних теорема примењених на троуглове $\triangle ABC$, $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ добијамо $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin(30^\circ + \alpha)}{\sin(60^\circ + 2\alpha)} = \frac{1}{2\cos(30^\circ + \alpha)}$, $\frac{DC}{BC} = \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin\varphi}$ и $\frac{AC}{DC} = \frac{\sin(30^\circ - \alpha + \varphi)}{\sin(120^\circ - \alpha)}$. Како је $\sin(60^\circ + \alpha) = \sin\big(180^\circ - (60^\circ + \alpha)\big) = \sin(120^\circ - \alpha)$, када измножиме горње три једнакости добијамо да је $\sin(30^\circ - \alpha + \varphi) = 2\cos(30^\circ + \alpha)\sin\varphi = \sin(30^\circ + \alpha + \varphi) - \sin(30^\circ + \alpha - \varphi)$, тј. $\sin(30^\circ - \alpha + \varphi) + \sin(30^\circ + \alpha - \varphi) = \sin(30^\circ + \alpha + \varphi)$, што кад средимо даје $\cos(\varphi - \alpha) = \sin(30^\circ + \alpha + \varphi)$. $\sin(90^\circ - \varphi + \alpha) - \sin(30^\circ + \alpha + \varphi) = 0 \ \Rightarrow\ 2\cos(60^\circ + \alpha)\sin(30^\circ - \varphi) = 0$. Ако би било $\cos(60^\circ + \alpha) \ \Rightarrow\ \alpha = 30^\circ$ онда би у троуглу $\triangle ADS$ (S је пресек дијагонала AC и BD) имали два права угла: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAS = 120^\circ - \alpha = 90^\circ$, $\sphericalangle DSA = \sphericalangle SAB + \sphericalangle ABS = 30 + \alpha + \alpha = 90^\circ$, што је немогуће. Због тога је $\sin(30^\circ - \varphi) = 0$, односно $\varphi = 30^\circ$.

4. Из $y^2 + y^4 \geqslant 2y^3$ и услова задатка имамо $x^2 - x^3 \geqslant y^4 - y^3 \geqslant y^3 - y^2$, а одавде стандардно и $2^{1/3}(x^3 + y^3)^{2/3} \geqslant x^2 + y^2 \geqslant x^3 + y^3$.

5. Најпре уочимо да је број $192 = 3 \cdot 2^6$, тражени број за све $n \leqslant 6$ (мада је то и више него што нам треба). Доказаћемо заправо, да се међу n-тоцифреним бројевима који у декадном запису садрже само 1, 9 и 2, налази бар један који је дељив са 2^n. И то индукцијом, најлакше. Очито за $n = 3$, број 192 је тај који задовољава услов задатка. Нека сада важи да за неко n имамо n-тоцифрен број записан искључиво помоћу 1-ица, 9-ки и 2-ојки (и при том се свака од њих бар једном појављује у том запису), који је дељив са 2^n, назовимо га a. Приметимо да број 10^n је свакако дељив са 2^n, а није са 2^{n+1}. Ако је број a био дељив са 2^n, а није са 2^{n+1}, онда јасно број $10^n + a$ или $9 \cdot 10^n + a$ ће бити дељив са 2^{n+1}, а у запису ће садржати само цифре 1, 9 и 2 (и сваку бар једном, јер се већ у a свака цифра појављује бар једном). Ако пак $2^{n+1} \mid a$, онда ће број $2 \cdot 10^n + a$ бити дељив са 2^{n+1}, а у запису ће садржати само цифре 1, 9 и 2. Тиме је доказ окончан.

Четврти разред – А категорија

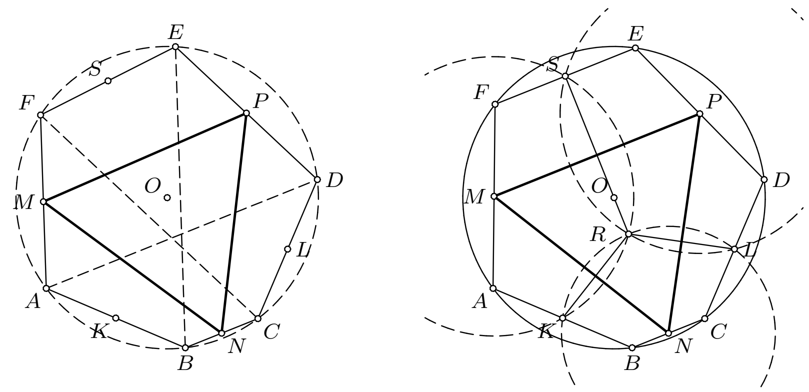
1. Нека је $x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b} \in \mathbb{N}$ и претпоставимо да је a различито од 0, што повлачи $a > 0$ (за $a < 0$ почев од неког члана израз под кореном би био негативан). Тада важи $4{x_n}^2 - {x_{n+2}}^2 = 3b$, а са друге стране имамо $4{x_n}^2 - {x_{n+2}}^2 = (2x_n + x_{n+2})(2x_n - x_{n+2})$. Како у овом производу први члан расте (јер је $x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b}$) почевши од неког $n_0 \in \mathbb{N}$ други члан биће већи од $|3b|$. Ово повлачи да је $2x_n - x_{n+2} = 0$, односно $x_{n+2} = 2x_n$ почевши од неког $n_0 \in \mathbb{N}$, јер су сви x_n природни бројеви. Даље добијамо $a \cdot 2^{n+2} + b = 4(a \cdot 2^n + b)$, одакле следи да је $b = 0$, што је контрадикција са полазном претпоставком (a и $2a$ не могу бити квадрати). Закључујемо да је $a = 0$ и b је потпун квадрат.

Напомена: Чињеницу $x_{n+2} = 2x_n$ могли смо да покажемо и коришћењем граничних вредности: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2}-2x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}-2\sqrt{a\cdot 2^n+b}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3b}{\sqrt{a\cdot 2^{n+2}+b}+\sqrt{a\cdot 2^n+b}} = 0.$

2. *Решење 1* (Тригонометријом): Означимо са O центар тог круга. Дакле углови $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \sphericalangle EOF = 60^\circ$. Означимо преостале централне углове $\sphericalangle BOC = \varphi$, $\sphericalangle DOE = \theta$, $\sphericalangle FOA = \psi$. Такође означимо са M, N и P средишта AF, BC и DE редом. Израчунајмо нпр дужину MN из троугла MON, применом косинусне теореме. Лако се види да је $\sphericalangle MON = 60^\circ + \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}$. Такође види се да је $MO = r\cos\frac{\psi}{2}$, а $NO = r\cos\frac{\varphi}{2}$, где смо са r означили полупречник круга. Из косинусне теореме $MN^2 = MO^2 + NO^2 - 2MO\cdot NO\cos(60^\circ + \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}) = r^2(\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos(60^\circ + \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}))$. Но како је $\frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2} + \frac{\theta}{2} = 90^\circ$, израз у загради можемо написати: $\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos(\frac{\theta}{2} + 30^\circ)$. Следи "краћи" тригонометријски рачун: $\cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}) = \cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\psi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\psi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}(1 - \cos^2\frac{\psi}{2}) + 1 - \sin^2\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 1 + \cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 1 - \sin^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 1 - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} = \sqrt{3}\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 1 - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$.
И као што видимо добијени израз за MN:

$$MN = r(\sqrt{3}\cos\tfrac{\psi}{2}\cos\tfrac{\varphi}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} + 1 - \sin\tfrac{\psi}{2}\sin\tfrac{\varphi}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}).$$

неће зависити од пермутовања ψ, φ, θ, тј. закључујемо да ћемо и при рачунању MP и NP добити овај исти резултат, тј. $MN = MP = NP$, односно $\triangle MNP$ је једнакостраничан, што је и требало доказати.



Решење 2 (Елементарном геометријом): Као и у првом решењу означићемо са M, N и P средишта AF, BC и DE редом. Такође, означићемо са K, L

и S средишта AB, CD и EF. Четвороуглови $ABCD$, $CDEF$ и $EFAB$ су једнакокраки трапези (нпр. $AB = CD$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DAC = 30^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$). Сада имамо следећу сличност: $\triangle KBN \cong \triangle LCN$ ($BN = CN$, $KB = LC = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$, док је $\sphericalangle ABN = \sphericalangle LCN$, јер је трапез $ABCD$ једнакокрак). Како је KN средња линија $\triangle ABC$ имамо да је $\sphericalangle KNB = 30^\circ$. Аналогно је и $\sphericalangle LNC = 30^\circ$. Ако сада опишемо кружницу са центром у N и полупречником $NL = NK$, добијамо да је периферијски угао који одговара луку LK (онај који се налази унутар шестоугла) једнак 60°, јер је централни угао $LNK = 120^\circ$. Аналогно, применимо на трапез $CDEF$ и опишемо лук LS, са центром у P и полупречником $PL = PS$. Означимо са R другу пресечну тачку лукова LK и LS. Јасно је да важи $\sphericalangle LRK = \sphericalangle LRS = 120^\circ$. Онда је и $\sphericalangle KRS = 120^\circ$, односно R је и на луку KS са центром у M и полупречником $MS = MK$, односно сва три лука имају заједничку тачку R. LR је заједничка тетива кружница са центрима N и P, па је $PN \perp LR$. Аналогно је и $PM \perp SR$ и $MN \perp KR$. Сада можемо израчунати да су $\sphericalangle MNP = \sphericalangle NPM = \sphericalangle PMN = 60^\circ$, односно $\triangle MNP$ је једнакостраничан.

3. Нека је $S = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$. Ако је d делилац броја n, онда је и $\dfrac{n}{d}$ делилац броја n, па је $d_{k-i} = \dfrac{n}{d_i}$, а како је $n > 1$, то је, бар за једно i, $d_{k-i} \neq \dfrac{n}{d_i}$. Одавде и из неједнакости између аритметичке и геометријске средине, добијамо: $2S = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(d_i + d_{k-i}) = \sum_{i=1}^{k}(d_i + \frac{n}{d_i}) > 2k\sqrt{n}$.

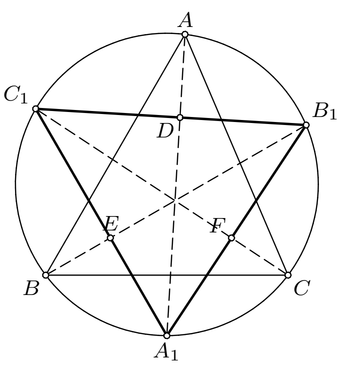
4. Показаћемо да овај низ има једну много згоднију рекурентну везу (од ове којом је задат у задатку). Посматрањем првих неколико чланова овог низа: 1,1,3,11,41,153... наслућујемо да је та веза: $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ из чега ће одмах следити тврђење задатка (јер ћемо имати линеарну рекурентну једначину у којој су сви коефицијенти целобројни, а прва два члана су целобројна $\Rightarrow$ сви чланови низа су цели бројеви). Да ова веза заиста важи проверићемо индукцијом. Видели смо да за $n = 3$ ова веза важи. Нека сад ова рекурентана веза важи за све $k \leqslant n$, доказаћемо да онда важи и за $n+1$. Ако у формулу којом је задат низ у задатку: $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{a_{n-1}}$ убацимо $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, што имамо према индуктивној претпоставци добијамо: $a_{n+1} = \dfrac{(4a_{n-1} - a_{n-2})^2 + 2}{a_{n-1}} = \dfrac{16a_{n-1}^2 - 8a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}^2 + 2}{a_{n-1}} = 16a_{n-1} - 8a_{n-2} + \dfrac{a_{n-2}^2 + 2}{a_{n-1}} = 16a_{n-1} - 4a_{n-2} - 4a_{n-2} + a_{n-3} = 4a_n - a_{n-1}$, што смо и хтели да покажемо. Из овога сада извлачимо већ горе поменути закључак, односно сви чланови овог низа су заиста цели бројеви.

5. Треба показати да постоји централни угао од 45 степени који садржи тачно 100 црвених тачака. Поделимо произвољно дати круг са четири пречника на 8 једнаких лукова од 45 степени; ово је увек могуће, јер тачака има коначно. Претпоставимо да се ни у једном исечку не налази тачно 100 тачака и без губљења општости се у неком делу A налази више, а у неком делу B мање од 100 тачака. Уведимо функцију f која броји црвене тачке унутар централног угла од 45 степени. Дакле, $f(A) > 100$ и $f(B) < 100$. Ротирањем централног угла око центра круга долазимо до следећих могућности: (i) нова тачка улази у дати угао; (ii) нека тачка излази из угла; (iii) једна улази, а друга излази; (iv) нема промене тачака. Дакле, f се или повећава за 1, или смањује за 1 или остаје константна при ротирању од дела A ка B. Како функција f на делу A узима вредност већу од 100, а на делу B је мања од 100, то постоји тренутак при ротирању од A ка B када се у централном углу налази тачно црвених 100 тачака.

Први разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за први разред А категорије.

2. Означимо $\{D\} = AA_1 \cap B_1C_1$, $\{E\} = BB_1 \cap C_1A_1$ и $\{F\} = CC_1 \cap A_1B_1$ и углове троугла $\triangle ABC$ са α, β, γ. Тада је $\sphericalangle C_1B_1B = \sphericalangle C_1CB = \gamma/2$, $\sphericalangle BB_1A_1 = \sphericalangle BAA_1 = \alpha/2$, $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle ABB_1 = \beta/2$. Сада из троугла $\triangle A_1B_1D$ добијамо да је угао код темена D једнак $\sphericalangle A_1DB_1 = 180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2) = 90^\circ$. Аналогно добијамо да су и B_1E и C_1F висине у троуглу $\triangle A_1B_1C_1$, па је центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ ортоцентар троугла $\triangle A_1B_1C_1$.



3. Ррансформисањем добијамо $m = \dfrac{a^2b^2(a-b) - c^2(a^3-b^3) + c^3(a^2-b^2)}{ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b)} =$ $\dfrac{a^2b^2 - a^2c^2 + abc^2 + b^2c^2 + ac^3 + bc^3}{ab - ac + bc + c^2} = \dfrac{a^2(b^2-c^2) + bc^2b - c) + ac^2(b-c)}{(b-c)(a-c)} =$ $\dfrac{ac(a-c) + b(a^2-c^2)}{a-c} = ab + ac + bc \in \mathbb{Z}$.

4. $\underbrace{11...11}_{100}\underbrace{22...22}_{100} = \underbrace{11...11}_{100}\cdot 10^{100} + 2\cdot\underbrace{11...11}_{100} = \frac{10^{100}-1}{9}\cdot 10^{100} + 2\cdot\frac{10^{100}-1}{9} = \frac{(10^{100}-1)\cdot(10^{100}+2)}{9} = \frac{10^{100}-1}{3}\cdot\frac{10^{100}+2}{3} = \underbrace{33...33}_{100}\cdot\underbrace{33...34}_{100}$.

5. а) Свако поље можемо обојити на 3 начина, па укупно бојења има $3^4 = 81$.
б) Када се све боје појављују имамо 2 поља обојена једном бојом и још по једно поље обојено преосталим бојама. Та 2 поља можемо одредити на $\binom{4}{2} = 6$ начина, а боју за та 2 поља на $\binom{3}{1} = 3$ начина и остала 2 поља можемо обојити на још $2! = 2$ начина, што нам даје укупно $6\cdot 3\cdot 2 = 81$ бојења у којима се све боје појављују.

Други разред – Б категорија

1. Дати број је једнак броју $10^{(2^{2004}+2^{1000})}+1 = \left(10^{2^{1000}}\right)^{2^{1004}+1}+1$, а то је сложен број (ако је n непаран а a произвољан природан број, тада је $a^n+1 = (a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\cdots+1)$ и то је дељиво са $a+1$).

2. Видети решење 2. задатка за други разред А категорије.

3. Према Вијетовим формулама, $x+y$ је један од корена квадратне једначине $x^2-10x+20=0$. Како ова једначина има дискриминанту $D=20$, она има два могућа решења. Збир та два решења је 10. Морамо још да проверимо да ли је једно од тих решења 11, јер се прва једначина система може свести на $y = \dfrac{x+y}{11-(x+y)}$. Како то није случај, коначно решење је 10.

4. Неједначина се може написати у облику (за $x\in[1,2]\cup\{3\}$):

$$\sqrt{(x-1)(3-x)}+\sqrt{(2-x)(3-x)} \geqslant \sqrt{(x-1)(3-x)}.$$

Очигледно је $x_1=3$ решење. После скраћивања са $\sqrt{(3-x)}>0$ добија се $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}\geqslant\sqrt{x-1}$. Након два квадрирања имамо $2\sqrt{(x-1)(2-x)}\geqslant 3-x$, односно $5x^2-18x+17\leqslant 0$. У овом случају нема решења (како је дискриминанта $D<0$, а коефицијент $a>0$ добијамо да је $5x^2-18x+17>0$ увек испуњено).
Једино реално решење дате неједначине је $x_1=3$.

5. Дата неједнакост је еквивалентна са (када кубирамо):

$$2n+3\sqrt[3]{n^2-1}(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1})<8n, \text{ тј. } \sqrt[3]{n^2-1}(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1})<2n.$$

Ако означимо $a=\sqrt[3]{n+1}$, $b=\sqrt[3]{n-1}$, последња неједнакост постаје $ab(a+b)<a^3+b^3$, а она је еквивалентно са $(a+b)(a-b)^2>0$, што је тачно јер $n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ a>0, b\geqslant 0$.

Трећи разред – Б категорија

1. Неопходно је да буде $x > 0$. Логаритмовањем обе стране једначине добијамо $\frac{1}{2}x \cdot \log x = \sqrt{x} \cdot \log x$, тј. $(x - 2\sqrt{x}) \log x = 0$, одакле је $x = 2\sqrt{x}$ или $\log x = 0$, тј. $x^2 = 4x$ или $x = 1$. Због услова $x > 0$ решења су $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$.

2. Треба видети да ли постоји реалан број a, такав да је $\dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leqslant a$ за свако $x \in \mathbb{R}$, и ако постоји пронаћи његову најмању вредност. Ова неједначина еквивалентна је са неједначином $0 \leqslant a(x^2+4x+5) - (2x^2+6x+6)$, (пошто је $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ за свако $x \in R$), односно са неједначином $0 \leqslant (a-2)x^2 + (4a-6)x + 5a - 6$. Нека је $g(x) = (a-2)x^2 + (4a-6)x + 5a - 6$. За $a = 2$ функција $g(x)$ је линеарна и очигледно је за неке реалне бројеве њена вредност негативна (када је $x < -2$). Ако је $a \neq 2$, тада је $g(x)$ квадратна функција, која треба да буде ненегативна за свако $x \in R$. То је остварено акко је $a-2 > 0$ и $0 \geqslant D = (4a-6)^2 - 4(a-2)(5a-6) = -4a^2 + 16a - 12$, односно ако је $a > 2$ и $a \in (-\infty, 1] \bigcup [3, \infty)$, дакле за $a \geqslant 3$. На овај начин смо доказали да је $f(x) \leqslant 3$, за свако $x \in \mathbb{R}$, а једнакост се достиже само за $x = -3$. Из свега наведеног закључујемо да дата функција има максимум и да је он једнак 3.

3. Видети решење 3. задатка за трећи разред А категорије.

4. Из прве две једнакости добија се $x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, $x \cos^2 \varphi + y \sin^2 \varphi = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$, тј. $(x-1) \sin^2 \alpha = (1-y) \cos^2 \alpha$, $(x-1) \cos^2 \varphi = (1-y) \sin^2 \varphi$, одакле је $\operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1-y}{x-1}$ и $\operatorname{tg}^2 \varphi = \dfrac{x-1}{1-y}$. Из треће једнакости добијамо $x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$, па важи $\dfrac{x^2(1-y)}{x-1} = \dfrac{y^2(x-1)}{1-y}$, односно $x^2(1-y)^2 = y^2(x-1)^2$, тј. $x(1-y) = \pm y(x-1)$, тј. $x + y = 2xy$ или $x = y$. Последња релација је немогућа, па је $x + y = 2xy$.

5. Из неједнакост хармонијске и аритметичке средине $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{4}{a+b}$ имамо

$$\log_{n-1} 10 + \log_{n+1} 10 = \frac{1}{\log_{10}(n-1)} + \frac{1}{\log_{10}(n+1)} > \frac{4}{\log_{10}(n-1) + \log_{10}(n-1)} = \frac{4}{\log_{10}(n^2-1)} > \frac{4}{\log_{10}(n^2)} = \frac{4}{2\log_{10} n} = \frac{2}{\log_{10} n} = 2\log_n 10.$$

Четврти разред – Б категорија

1. Услов $5 - 2\sin\dfrac{x}{6} \geqslant 0$, тј. $\sin\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{5}{2}$ је очигледно увек испуњен, тј. корен је дефинисан за свако $x \in \mathbb{R}$. Увођењем смене $t = \sin\dfrac{x}{6}$, добијамо ирационалну неједначину $\sqrt{5-2t} \geqslant 6t - 1$. Имамо два случаја.

1° $\underline{t \leqslant \frac{1}{6}}$: $\sqrt{5-2t} \geqslant 0 > 6t - 1$, па су сви $t \leqslant \dfrac{1}{6}$ решења;

2° $\underline{t > \frac{1}{6}}$: овде су оба члана позитивни, па смемо да квадрирамо и добијамо квадратну неједначину $18t^2 - 5t - 2 \leqslant 0$. Њена решења су $t \in [-\frac{2}{9}, \frac{1}{2}]$, што са условом даје решење $t \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$.

Заједно ова два случаја дају $t \leqslant \frac{1}{2}$, односно $\sin\frac{x}{6} \leqslant \frac{1}{2}$. Одатле добијамо да је $\frac{x}{6} \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{13\pi}{6}+2k\pi]$, те је коначно решење $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[5\pi+12k\pi, 13\pi+12k\pi]$.

2. Означимо $A_n = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)$. Како важи $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\ldots$, $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$, биће $A_n < \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{A_n}\cdot\frac{1}{2n+1}$, односно важи $A_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, па због $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, важи и $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$.

3. Видети решење 3. задатка за четврти разред А категорије.

4. 1° За $n = 1$ имамо да је $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = \sqrt{1}$. ✓

2° Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{k}$.

3° Покажимо да тврђење важи и за $n = k+1$: Како је $\sqrt{k(k+1)} > \sqrt{k^2} = k$ имамо

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{(2^\circ)}{\geqslant} \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1+\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{k+1}} > \frac{1+k}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}.\ ✓$$

Стога је по принципу математичке индукције $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}$.

5. Нека је x основна ивица и H висина призме. Из $V = B\cdot H = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}\cdot H$ добијамо да важи $H = \frac{2V}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{8}{x^2}$. Збир дужина свих ивица призме је $f(x) = 12x + 6H = 12x + \frac{48}{x^2}$. Како је $f'(x) = 12 - \frac{96}{x^3}$, то функција f има минимум за $x = \sqrt[3]{8} = 2$ (због $f''(x) = \frac{288}{x^4} > 0$). Тада је $H = \frac{8}{x^2} = 2$ и $P = 3\sqrt{3}x^2 + 6xH = 12\sqrt{3} + 24$.

СПИСАК УЧЕСНИКА 47. РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

I разред – А категорија

1. Јелић Марија, Београд
2. Николић Владимир, Београд
3. Лазић Бојан, Крагујевац
4. Лазовић Ива, Београд
5. Петровић Ивана, Београд
6. Оташевић Никола, Београд
7. Глушчевић Милан, Београд
8. Богдановић Мирослав, Београд
9. Мојсиловић Јелена, Ваљево
10. Дамјановић Александар, Беог.
11. Станишић Стасја, Београд
12. Бановић Милан, Ваљево
13. Слободан Драшковић, Краљево
14. Гомбар Тамаш, Сента
15. Кнежевић Јована, Београд
16. Кабиљо Маја, Београд
17. Калмар Гергељ, Сента
18. Марјановић Аљоша, Београд
19. Радосављевић Јован, Ниш
20. Милосављевић Никола, Ниш
21. Миловановић Игор, Београд
22. Илић Јанко, Београд
23. Ристић Коста, Београд
24. Радовановић Јелена, Београд
25. Исаиловић Душан, Крагујевац
26. Лекић Марија, Београд
27. Анастасијевић Ана, Београд
28. Јухас Андор, Сента
29. Ђурђевац Ана, Београд
30. Гавриловић Иван, Београд
31. Чизмадија Лаура, Суботица

I разред – Б категорија

32. Радосављевић Мирјана, Пожега
33. Раденковић Лазар, Ниш
34. Пиштињат Неда, Зрењанин
35. Барać Бранко, Зрењанин
36. Милентијевић Петар, Б. Башта
37. Пурић Софија, Јагодина
38. Разуменић Иван, Вршац
39. Миленковић Стефан, Ниш
40. Ђорђевић Никола, Крушевац
41. Баљозовић Милош, Лесковац
42. Седлар Сара, Ср. Митровица
43. Чеперковић Жељка, Вр. Бања
44. Игрић Предраг, Београд
45. Шапоњић Невена, Београд
46. Леваја Игор, Пожаревац
47. Павловић Александар, Пожар.
48. Филиповић Аљоша, Панчево
49. Радовановић Милан, Крушевац
50. Рудакијевић Наташа, Нови Сад
51. Величковић Дејана, Обреновац
52. Дојић Милица, Нови Сад
53. Михајловић Миња, Нови Сад
54. Чутовић Иван, Г. Милановац
55. Међо Данило, Зрењанин
56. Марковић Урош, Крагујевац
57. Кочинац Влада, Александровац
58. Мишић Александар, Лозница
59. Ђуричић Снежана, См. Паланка
60. Ерић Петар, Лозница
61. Цветковић Марија, Влад. Хан

II разред – А категорија

62. Радојевић Младен, Ваљево
63. Јевремовић Марко, Краљево
64. Крпић Данијел, Београд
65. Смаилагић Маријана, Београд
66. Ранковић Сандра, Београд
67. Пантић Младен, Ваљево

68. Костић Милан, Београд
69. Поповић Горица, Београд
70. Нојић Марко, Јагодина
71. Јаношев Игор, Београд
72. Милошевић Бојана, Београд
73. Карабашевић Анђела, Београд
74. Андрић Јелена, Београд
75. Митровић Дејан, Лесковац
76. Радичевић Ђорђе, Ниш
77. Трокицић Александар, Ниш
78. Вукмировић Ненад, Београд
79. Ђокић Татјана, Нови Сад
80. Милошевић Милана, Београд
81. Катић Војин, Београд
82. Пајовић Јелена, Београд
83. Србуловић Тамара, Београд
84. Стојановић Иван, Ниш
85. Мицић Милан, Крагујевац
86. Ћопић Милан, Београд
87. Давидовић Ђорђе, Ваљево
88. Јанковић Урош, Београд
89. Станковић Иван, Београд
90. Трајковић Александра, Ниш
91. Ћирић Марко, Крагујевац
92. Стајић Обрад, Ниш
93. Шубић Виктор, Београд
94. Стрезоски Реља, Нови Сад
95. Чизмади Жолт, Сента
96. Кнежевић Марко, Нови Сад
97. Стојанов Марица, Нови Сад
98. Тодоровић Сњежана, Нови Сад
99. Милошевић Милош, Београд
100. Дуњић Стефан, Београд
101. Антић Милош, Београд
102. Трпчевски Младен, Београд
103. Стојковић Ненад, Сомбор

II разред – Б категорија

104. Јанковић Страхиња, Крушевац
105. Лакатош Золтан, Суботица
106. Вељковић Никола, Пирот
107. Марковић Светлана, Вр. бања
108. Михајловић Милош, К. Митр.
109. Арсић Дуња, Нови Сад
110. Петровић Ленка, Ивањица
111. Тодосијевић Раца, Трстеник
112. Тошић Милена, Велика Плана
113. Мијаиловић Немања, Н. Пазар
114. Милић Угљеша, Смедерево
115. Пантић Гавро, Чачак
116. Николић Никола, Ивањица
117. Вељић Владимир, Ниш
118. Ћирић Здравко, Пирот
119. Динић Владимир, Б. Паланка
120. Миленковић Данијела, Параћ.
121. Ференц Тамара, Ср. Митр.
122. Павловић Владан, Ниш
123. Мак Роберт, Нови Сад
124. Пауновић Александар, Пожар.
125. Даскаловић Вукашин, Власот.
126. Павловић Иван, Панчево
127. Разуменић Јована, Вршац
128. Томић Зоран, Крушевац
129. Гочанин Бојана, Вр. Бања
130. Столић Александра, Прокупље
131. Арсеновић, Александар, Беог.
132. Стојилковић Милош, Лебане
133. Тодоровић Бранислав, Чачак
134. Петровић Јелена, Параћин
135. Богдановић Никола, Јагодина
136. Ђорђевић Зорана, Јагодина
137. Бајић Буда, Н. Кнежевац
138. Шомођи Хуба, Суботица
139. Пакоци Едвин, Зрењанин
140. Драшковић Дарко, Вршац
141. Милетић Бојан, Нова Варош
142. Мутавдзин Славица, Панчево
143. Гостовић Никола, Нови Сад
144. Карличић Марко, Ниш
145. Стојиљковић Марко, Сурдул.
146. Парезановић Лена, Врање
147. Милићевић Немања, Суботица
148. Остојић Владимир, Сомбор
149. Димитријевић Сара, Вршац
150. Бабић Младен, Шабац
151. Матић Ивана, Аранђеловац

152. Војводић Милица, Сурдулица
153. Медић Доријана, Апатин

III разред – А категорија

154. Ковачевић Тијана, Београд
155. Јовановска Искра, Београд
156. Илић Андреја, Ниш
157. Јанковић Стеван, Крушевац
158. Николић Мирослав, Нови Сад
159. Јанковић Марија, Ваљево
160. Стојчић Петар, Београд
161. Радановић Бранко, Нови Сад
162. Филиповић Димитрије, Беог.
163. Серафимовић Ана, Лесковац
164. Станојевић Милица, Крушевац
165. Козић Надица, Крушевац
166. Благојевић Милован, Краљево
167. Нинковић Игор, Београд
168. Квргић Срђан, Нови Сад
169. Јовановић Андрија, Београд
170. Јовановић Наталија, Београд
171. Стевановић Душан, Београд
172. Маринковић Ивана, Београд
173. Матковић Милош, Нови Сад
174. Пејић Петар, Ниш
175. Опсеница, Слободан, Београд
176. Ђорић Милош, Београд
177. Николић Бранко, Београд
178. Даниловић Дајана, Ваљево
179. Јанковић Ратко, Београд
180. Петровић Далибор, Нови Сад
181. Миловановић Вукашин, Краг.
182. Стојадиновић Милана, Н. Сад
183. Шкориц Немања, Нови Сад
184. Митровић Слободан, Нови Сад
185. Поповић Немања, Нови Сад
186. Ђурић Никола, Београд

III разред – Б категорија

187. Ковачки Невен, Зрењанин
188. Димитриевска Мирјана, Бор
189. Грозданић Јована, Панчево
190. Тробок Бојан, Нови Сад
191. Павловић Марко, Пирот
192. Траиловић Стефан, Смедерево
193. Живковић Стефан, Зајечар
194. Белић Јована, Нови Пазар
195. Ђурић Јелена, Крупањ
196. Јоргачевић Иван, Влад. Хан
197. Кекић Марија, Бор
198. Костадиновић Јелена, Крупањ
199. Пантовић Јасмина, Београд
200. Маленов Душан, Вршац
201. Петровић Душан, Вр. Бања
202. Тодоровић Милан, Зајечар
203. Томановић Јелена, Београд
204. Милинковић Бранислава, Шаб.
205. Ранђеловић Јасмина, Прокуп.
206. Цветићанин Никола, См. Пал.
207. Станковић Милена, Ниш
208. Миладиновић Ана, Јагодина
209. Богућанин Елмедина, Н. Пазар
210. Зечевић Никола, Зрењанин
211. Васиљевић Ружица, Куршум.
212. Ранђеловић Марина, Ниш
213. Блазнавац Александра, Лазар.
214. Фратрић Ивана, Сомбор
215. Ђорђевић Милан, Лесковац
216. Пешић Димитрије, Лесковац
217. Јовановић Драгана, Кос. Митр.
218. Крстић Младен, Шабац
219. Станковић Слађана, Влад. Хан
220. Јешић Недељко, Пожега
221. Николић Весна, Зајечар
222. Поклопић Владан, Пријепоље
223. Бошковић Никола, Трстеник
224. Војновић Ивана, Рума
225. Фејсов Владимир, Сомбор
226. Шоти Валентин, Суботица
227. Поповић Тамара, Крагујевац

IV разред – А категорија

228. Башић Бојан, Нови Сад
229. Стојсављевић Петра, Београд
230. Рајковић Урош, Београд
231. Кабиљо Игор, Београд
232. Милошевић Војислав, Београд
233. Николов Јована, Ниш
234. Кошчица Марко, Београд
235. Крстић Срђан, Ниш
236. Стојанов Ивана, Нови Сад
237. Розгић Дејан, Београд
238. Манић Ана, Београд
239. Трифуновић Лука, Београд
240. Николић Душан, Београд
241. Баралић Ђорђе, Крагујевац
242. Алимпић Миша, Крагујевац
243. Вељковић Ненад, Београд
244. Лукић Никола, Београд
245. Доброта Милан, Нови Сад
246. Радулашки Марина, Београд
247. Ђуретић Јована, Београд
248. Младеновић Ана, Ниш

IV разред – Б категорија

249. Стојановић Љиљана, Лесковац
250. Марић Слађана, Лозница
251. Латиновић Александар, Зрењ.
252. Скулић Јелена, Београд
253. Спасић Ана, Лазаревац
254. Гвозденовић Никола, Н. Варош
255. Ристић Јелена, Трстеник
256. Јовановић Павле, Пирот
257. Јанковић Јелена, Вр. Бања
258. Јовановић Александар, Шид
259. Драгаш Јелена, Београд
260. Јовић Александар, Влад. Хан
261. Животић Немања, Младеновац
262. Радовановић Срђан, Београд
263. Мићовић Иван, Београд
264. Богдановић Милош, Бор
265. Павловић Марко, Бор
266. Петковић Милица, Књажевац
267. Лукић Никола, Уб
268. Ђоровић Оливера, Кос. Митр.
269. Тодоровић Јелна, Кос. Митр.
270. Бантић Катарина, Лозница
271. Дамљановић Милан, Ивањица
272. Вујић Вукан, Ниш
273. Тимко Наташа, Врњачка Бања
274. Тиквицки Дејан, Суботица
275. Субашић Милош, Рума
276. Вујанић Марија, Рума
277. Контрец Даријан, Шид
278. Николић Данко, Ужице
279. Бенде Игор, Суботица
280. Вујичић Љубо, Нова Варош
281. Јеремић Дарио, Ужице
282. Стеванетић Срђан, Н. Варош
283. Кладарин Бојан, Лозница
284. Јовановић Коста, Чачак
285. Миладиновић Ивица, В. Плана
286. Млађеновић Душан, Смедер.
287. Василић Жељко, Београд
288. Вуковић Милош, Београд
289. Костић Марко, Бор
290. Пајић Сања, Пожаревац
291. Стричевић Небојша, Сомбор
292. Радовић Славко, Ужице
293. Митић Марија, Бабушница
294. Јеличић Јована, Брус
295. Вучковић Ненад, Куршумлија
296. Радуловић Милош, Сомбор
297. Танасковић Марко, Ваљево
298. Лапчевић Бранимир, Блаце
299. Исајловић Мирослав, Крагуј.
300. Стојанчевић Маја, Сомбор
301. Лукић Ружица, Крагујевац
302. Крстић Марија, Крагујевац
303. Маринков Сава, Нови Сад
304. Самарџић Наташа, Нови Сад

САДРЖАЈ

Општинско такмичење 5
Окружно такмичење 8
Републичко такмичење 12
Решења задатака са општинског такмичења 16
Решења задатака са окружног такмичења 26
Решења задатака са републичког такмичења 39
Списак учесника републичког такмичења 50