ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2007/2008.

Београд, 2008

Почасни одбор 50. Државног такмичења из математике

1. Зоран Алимпић, в.д. градоначелника
2. Мирјана Божидаревић, председник општине Стари град
3. проф. др Љубомир Протић, директор ЗУОВ
4. проф. др Александар Липковски, помоћник министра просвете
5. Владимир Тодић, градски секретеријат за образовање

Организациони одбор 50. Државног такмичења из математике

1. Зорица Благојевић
2. Марија Грујић
3. Бранка Добрковић
4. др Владимир Драговић
5. Ивана Зечевић
6. проф. др Ариф Золић
7. Светлана Јакшић
8. Вера Јоцковић
9. проф. др Зоран Каделбург
10. Станка Матковић
11. Мирјана Мићић
12. Илија Мировић
13. мр Срђан Огњановић
14. Мирјана Перовановић
15. др Бранислав Поповић
16. Бојан Ристић
17. мр Михаил Сопић
18. Јасмина Стошић

Редакција и обрада: Ђорђе Кртинић

50 ГОДИНА РЕПУБЛИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Рад са младима је вероватно један од најважнијих, а сигурно најбоље организован вид делатности Друштва математичара Србије, практично од његовог оснивања. Он се одвијао и одвија у више облика – кроз припреме младих математичара и програмера, на летњим и зимским школама, у оквиру издавачке делатности чији је већи део окренут младима и у, ако не најважнијем, оно сигурно најпознатијем и најатрактивнијем облику – такмичењима.

Такмичења младих математичара Друштво је почело да организује још 1958. године и од тада овај вид активности се усталио и постао незаобилазан облик рада са ученицима. Нећемо претерати ако кажемо да су у поплави разноразних такмичења из многих области која се организују у последње време, такмичења која организује Друштво математичара сигурно и најстарија, и најмасовнија и најбоље организована. У њиховој реализацији, посредно и непосредно, учествују практично сви извођачи наставе из математике и рачунарства у основним и средњим школама, као и они запослени у разним просветним институцијама, а непосредну организацију и контролу изводе Републичке комисије за такмичења (има их укупно четири).

Не постоје сасвим прецизни подаци о броју ученика који се такмиче, али неке процене говоре да на почетним ступњевима, на сва четири вида такмичења укупно, годишње учествује око 100 000 такмичара. Кроз оштру селекцију, од школских и општинских такмичења, преко окружних и државних, до Српских олимпијада долази укупно око 150 најбољих, да би се у олимпијске екипе које представљају Србију на међународним такмичењима из математике и рачунарства пласирало њих 20.

Прво „такмичење ученика гимназија у решавању задатака из математике" одржано је у организацији градске подружнице Друштва математичара, физичара и астронома Србије у Београду 1958. године. Већ наредне године, 26.04.1959. у Београду се одржава **Прво републичко такмичење**, пошто су претходно одржана два припремна ступња. На првом је учествовало око 2000 ученика из 68 гимназија, на другом („среском") 421 ученик у 12 центара, да би на завршном ступњу учествовало 109 такмичара из 44 гимназије. Прве награде освојили су: *Душан Обрадовић*, ученик VIII разреда XIV београдске гимназије, *Миодраг Кирић*, VII разред II гимназије у Зрењанину, *Зоран Стојаковић*, VI разред гимназије „С. Марковић" у Новом Саду, *Стеван Кузмановић*, VI разред XIV београдске гимназије и *Небојша Марић*, VI разред II београдске гимназије.

Традиција организовања оваквих такмичења је врло брзо успостављена, а интересовање и број учесника су нагло расли. Републичка такмичења су у почетку редовно одржавана у Београду, да би почев од 1977. године она почела да се одржавају у разним местима широм Србије, што је још више допринело њиховој популаризацији, а рекли бисмо често и бољој организацији. Ево списка градова у којима су од тада одржана Републичка (сада Државна) такмичења: Смедеревска Паланка 1977, Чачак 1978, Београд 1979. и 1980, Ваљево 1981, Светозарево 1982, Бор 1983, Ниш 1984, Трстеник 1985, Т. Ужице 1986, Аранђеловац 1987, Врање 1988, Светозарево 1989, Кладово 1990, Београд и Сомбор 1991, Ивањица и Кикинда 1992, Београд, Ниш и Врбас 1993, Пожаревац и Нови Сад 1994, Крушевац и Челарево 1995, Нови Сад 1996, Београд 1997, Крагујевац 1998, Чачак 1999, Панчево 2000, Београд 2001, Ужице 2002, Шабац 2003, Ниш 2004, Зрењанин 2005, Врњачка Бања 2006, Суботица 2007 и Београд 2008. Почев од 1999. године такмичење се одвија у две категорије – категорију А чине ученици Математичке гимназије и специјализованих математичких одељења, а Б категорију остали ученици.

Међу најважније ефекте такмичења свакако спада подизање интересовања за математику. Такође, постиже се знатно проширивање знања, и по обиму и по дубини, међу ученицима способним за овакве изазове. Нећемо претерати ако кажемо да је велика већина успешних такмичара касније наставила да се бави математиком у неком виду, па су одлазили на студије било математике било неких сродних области, најчешће техничких, на којима се математика примењује. Многи од њих су били и међу најуспешнијима на тим студијама, па им је и даље опредељење била математика. Данас, међу асистентима и професорима на Универзитетима, научним и стручним сарадницима у Институтима већину чине они који су се калили кроз такмичења, често још од основне школе.

На жалост, нема прецизних података о свима онима који су у првим годинама организације ових такмичења поднели највећи терет њихове припреме. У фрагментарним записима и сећањима налазимо имена *Јелене Михајловић, Богољуба Станојевића, Милице Илић-Дајовић, Константина Орлова, Олге Митриновић, Мирослава Живковића, Слободанке Крстић, Ковиљке Попов, Љиљане Петровић, Владимира Мићића*, … . Према неким сећањима, у почетку Републичка комисија није имала формалног председника, а затим су њеним радом руководили *Слободанка Крстић* и *Ковиљка Попов*. Каснија времена се боље памте, па знамо да су председници Републичке комисије почев од седамдесетих година били: *Бранка Ђерасимовић, Живорад Ивановић, Зоран Каделбург, Срђан Огњановић, Павле Младеновић, Ђорђе Дугошија, Владимир Драговић, Раде Тодоровић, Милена Радновић, Ђорђе Кртинић, Владимир Балтић* и *Раде Живаљевић*. Иначе, сама комисија се мењала, али је углавном имала око 20 чланова, при чему су то већ одавно по правилу бивши такмичари, а сада асистенти или професори на факултетима или најуспешнији професори средњих школа.

Републичко (државно) такмичење није завршни ступањ. Само годину дана после Првог републичког, одржано је и Прво савезно такмичење, такође у Београду 1960. године. Иницијатор и годинама главни организатор Савезног такмичења било је Друштво математичара Србије; оно је првих петнаестак година стално и одржавано у Београду. Такође, такмичари из Србије имали су на овим такмичењима далеко највише успеха – често су по броју награда превазилазили и све остале републике заједно. Од прошле године ово такмичење је замењено Српском математичком олимпијадом ученика средњих школа.

Исте године кад и наше Прво републичко такмичење, дакле 1959, одржана је у Румунији Прва међународна математичка олимпијада. Југославија се врло брзо укључила у ово такмичење, пославши своју екипу на Пету олимпијаду у Пољску 1963. године. После свега што је речено вероватно је сувишно истицати да су у наредним годинама основу југословенске екипе на Олимпијадама по правилу сачињавали ученици из Србије. Дугачак је и списак награда (односно медаља како се сада зову) које су наши такмичари освојили на Међународним олимпијадама. Овде ћемо издвојити само прве награде (златне медаље) које су освојили: *Б. Варга Јожеф* и *Миодраг Живковић* 1974, *Раде Тодоровић* 1989, *Душан Ђукић* 1999. и *Младен Радојевић* 2007. године.

У Југославији је два пута и одржана Међународна олимпијада – 1967. године на Цетињу (при чему је комплетну организацију спровело Друштво математичара Србије) и 1977. године у Београду. Осим веома успешне организације, треба поменути и да је у оба случаја значајно проширен круг земаља-учесница – док су пре 1967. године на Олимпијадама учествовале само земље Источне Европе, на наш позив олимпијском покрету придружиле су се В. Британија, Француска, Шведска и Италија. Слично, 1977. године први пут су учествовали Алжир, Куба и Бразил, што је отворило пут даљем повећању олимпијске породице која сада броји преко 90 земаља са свих континената.

Од 1987. година Југославија (а затим Србија) редовно учествује и на Балканским математичким олимпијадама и на њима такође освајa многе награде. Као и случају Међународних олимпијада, наводимо само носиоце златних медаља: *Раде Тодоровић* (1987, 1988. и 1989), *Растко Маринковић* и *Милена Радновић* (1989), *Игор Долинка* (1990. и 1992), *Младен Лаудановић* (1991. и 1992), *Велибор Тинтор* (1992), *Драган Стевановић* (1993), *Мирослав Тремл* (1995), *Ђорђе Милићевић* (1995. и 1996), *Душан Ђукић* и *Горан Предовић* (1998), *Марко Јевремовић* (2006). Два пута били смо и успешни домаћини Балканијаде – 1994. у Новом Саду и 2001. у Београду.

Задаци са Републичких (Државних) такмичења објављују се у свескама едиције „Материјали за младе математичаре”. Тако су у свесци 16 објављени задаци (са решењима) из година 1970–1983. Свеска 38 садржи текстове задатака са свих такмичења од 1959. до 2000. године. Најзад, у свесци 39 се могу наћи задаци и нека решења задатака из година 1990–2001. Почев од 1977. године редовно се објављују „Билтени”, односно збирке задатака, са решењима, са свих такмичења средњошколаца, закључно са Републичким (Државним), из текуће године.

У закључку поменимо и аргументе оних који су против такмичења. Има ученика којима овај вид „бављења математиком” не лежи – не могу се прилагодити притиску да „морају успети”, смета им ограничено време у оквиру којег треба урадити постављене задатке, или једноставно имају трему. Или, нешто што се ређе помиње, а чини нам се можда и важније – понеки од најуспешнијих такмичара наставе да се баве само решавањем проблема и у каснијим годинама, не схватајући да је озбиљно бављење математиком ипак нешто много више. Све је ово тачно, а сигурно је да би се нашло и више аргумената „против”. Но, сматрамо да их аргументи „за”, од којих су само неки поменути у овом кратком приказу, и по броју и по значају далеко превазилазе.

Зато смо сигурни да јубилеј Републичких такмичења који овом приликом обележавамо неће бити и последњи.

У Београду, марта 2008. *др Зоран Каделбург*

ЗАПИС О БЕОГРАДУ

Београд, град веома бурне историје, један је од најстаријих у Европи. Његова историја траје пуних **7 000 година**. Простор око великих река Саве и Дунава био је насељен још у палеолитском периоду. Из старијег каменог доба потичу остаци људских костију и лобања неандерталаца, пронађени у каменолому код Лештана, у пећини на Чукарици и у близини Бајлонијеве пијаце.

Остаци културе млађег каменог доба пронађени су у Винчи, Жаркову и Горњем граду, изнад ушћа Саве у Дунав. То указује да је простор Београда био насељен у континуитету и да је интезитет тог насељавања бивао све јачи. Многа данашња насеља београдске околине леже на културним слојевима ранијих праисторијских насеобина.

Винча крај Београда спада у ред најзначајнијих насеобина и културних налазишта праисторијског периода. Археолошке ископине на Роспи ћуприји, Горњем граду, Карабурми, Земуну и Винчи потврђују претпоставке да је подручје Београда било интезивно насељено и да се његово становништво бавило плужном земљорадњом и другим пратећим привредним делатностима. На овим локалитетима откривене су некрополе бронзаног и металног доба, као и докази различитих културних утицаја.

Београд је средиште културе и уметности Србије. У Београду стварају многи наши значајни уметници, годишње се одржи више од 9 000 позоришних представа, изложби, концерата, перформанса и других уметничких програма, гостују бројни еминентни ствараоци из света уметности. Београд је седиште највиших државних и националних институција културе и уметности: **Српске академије наука и уметности**, **Народне библиотеке Србије**, **Народног музеја**, **Народног позоришта**, **Универзитета у Београду**, **Универзитета уметности**.

У Београду се налазе значајна дела архитектуре, **Калемегдан** и **Београдска тврђава**, споменици културе и друга непокретна културна добра, бројна археолошка налазишта са материјалним остацима који сведоче о развијеној цивилизацији и култури на тлу Београда од праисторије до данас.

Град Београд оснивач је **36 установа културе** (11 позоришта, 8 установа заштите, 4 библиотеке, 13 центара за културу и галерија) и 2 јавна предузећа за које обезбеђује услове рада, а истовремено помаже реализацију програма и програмских пројеката 101 установе и уметничке асоцијације.

Београд, као универзитетски центар, има **2 државна универзитета** и више приватних високообразовних институција. У Београду има 280 основних и средњих школа. Од 195 основних школа – 162 су редовне основне, 14 је специјалних основних школа, 15 уметничких и 4 школе за основно образовање одраслих.

Београд је и седиште врхунских **научних** и **истраживачких установа** из свих области.

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

Математичка гимназија у Београду почела је са радом 19.09.1966. године као трогодишња средња школа. У почетни, други разред, уписивани су ученици који су завршили први разред средњих школа, а после положеног пријемног испита. Те прве године, после три конкурса, пријавило се свега 56 ученика у други разред. Данас, школа има шест одељења првог разреда, по пет у осталим разредима средње школе. Од 2004. године, у Математичкој гимназији раде и по два одељења седмог и осмог разреда основне школе.

Основне карактеристике рада Математичке гимназије су:

– посебан одабир талентованих ученика кроз специфичан пријемни испит и правила уписа;

– посебан план и програм по којем се настава математике, информатике и физике изводи на изузетно високом нивоу;

– доследно спровођење принципа да је талентованом ученику неопходан надарени професор, кроз брижљиво неговање наставног кадра, који се регрутује добрим делом из редова бивших ученика ове школе;

– од посебног значаја је двосмерна сарадња са Универзитетом у Београду, Математичким институтом САНУ, Институтом за физику, тако да редовну наставу изводи двадесетак доктора наука и десетак магистара, а још отприлике толико је ангажовано кроз друге, додатне облике наставе;

– одељења од 20 ученика, која се повремено деле на групе;

– примена разноврсних облика наставе, од класичних до савремених, укључујући и менторску наставу;

– тежња да се код ученика развија активан однос према знању, повезивању различитих предмета и садржаја, да се стимулише критички и стваралачки дух, да се истичу високе моралне, научне и опште цивилизацијске вредности;

– стално унапређивање наставе, дуг, постепен и непрекидан процес, заснован и на сопственим искуствима и истраживањима, али и на искуствима најистакнутијих светских институција и научних ауторитета.

Доследно спровођење наведених принципа донело је и резултате. За непуне четири деценије кроз школу је прошло око 6 000 ученика. Око 250 је касније докторирало, око 400 магистрирало. Многи од њих су постали професори угледних светских универзитета или водећи стручњаци у различитим областима.

На међународним такмичењима ученици Математичке гимназије су освојили 300 медаља, што је редак, ако не и јединствен успех једне школе у свету. Златне медаље на Међународним математичким олимпијадама освојили су Јожеф Б. Варга, Миодраг Живковић, Душан Ђукић и Младен Радојевић. Поред изузетних успеха у области математике, физике, информатике и астрономије, ученици Математичке гимназије су успешни и у другим областима: освајају награде на републичким такмичењима из српског језика и књижевности, историје, шаха, а такође освајају престижне награде у глуми, рецитовању, спорту, мултимедијалним презентацијама, дебатовању итд.

Влада Републике Србије је на седници одржаној 10. маја 2007. године донела Одлуку о одређивању Математичке гимназије за школу од **посебног интереса за Републику Србију**.

Математичка гиманазија је стекла велики углед и добила многа признања за дугогодишњи рад са генерацијама обдарених ученика. Добитник је више значајних признања међу којима су Октобарска награда „Доситеј Обрадовић”, и републичка награда „Вук Караџић” додељена за изузетне резултате постигнуте у области образовања и васпитања. Школа је 2007. године добила и Светосавску награду Министарства просвете.

У Београду, марта 2008. *др Владимир Драговић*

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2007/2008.

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет, Београд
2. Балтић Владимир, Факултет организационих наука, Београд
3. Гајић др Борислав, Математички институт САНУ
4. Димитријевић мр Слађана, ПМФ, Крагујевац
5. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
6. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
7. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
8. Ђукић Душан, Универзитет у Торонту, Канада
9. Живаљевић др Раде, Математички институт САНУ
10. Икодиновић др Небојша, ПМФ, Крагујевац
11. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд
12. Кртинић мр Ђорђе, Математички факултет, Београд, председник
13. Лукић Миливоје, Калтех, САД
14. Матић Иван, Беркли, САД
15. Милићевић др Ђорђе, Универзитет у Мичигену, САД
16. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
17. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
18. Радновић др Милена, Математички институт САНУ, Београд
19. Сеничић Александар, Гимназија, Краљево
20. Станојевић Раде, Хамилтон институт, Ирска
21. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад
22. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
23. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд
24. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Одредити да ли је број $10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^{5}}}}$ дељив са 11.

2. Одредити све вредности реалног параметра a, за које једначина

$$\Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big| = a$$

има највећи могући број решења.

3. Ана и Оља су једног дана шетале (по најкраћем путу) до својих момака Косте и Лазе. Оне су се среле у хладу једног старог дрвета. Том приликом су приметиле да се Ољин момак Лаза налази тачно на пола пута који Ана прелази до цркве, да се Анин момак Коста налази тачно на средини пута од банке до цркве, да је банка од Ољине куће једнако удаљена као црква од Анине и да је растојање између банке и цркве једнако растојању између Анине и Ољине куће, али да се банка налази са десне стране када Ана из своје куће гледа Ољу на балкону њене куће. Договориле су се да се у повратку у 7 увече поново сретну испод истог дрвета. Да би Ана стигла на време замолила је Косту да јој израчуна које је растојање између његове куће и старог дрвета. Он зна да растојање између његове и Анине куће износи $2km$. Колики ће пут Ана прећи од Костине куће до старог дрвета?

4. Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана. Сваког дана израсте иста количина траве.

(а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?

(б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?

5. На полици се налази 14 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 књига тако да никоје две изабране књиге нису суседне?

Први разред, Б категорија

1. Колико има петоцифрених бројева записаних непарним цифрама, међу којима је бар једна јединица?

2. Одредити све просте бројеве p такве да је $5p+1$ квадрат природног броја.

3. У xy-равни одредити површину фигуре ограничене линијом

$$|x+1| + |y-2| = 3.$$

4. Видети први задатак за први разред А категорије.

5. Видети четврти задатак за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Доказати да се ниједан прост број облика $p = 2^{2^n} + 1$ не може представити као разлика петих степена два природна броја.

2. Над квадратним триномом $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ дозвољено је вршити следеће операције:

1° међусобно заменити a и c за $c \neq 0$;

2° заменити x са $x + t$, где је t неки реалан број.

Може ли се применом ових операција

(а) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $x^2 - x - 1$?

(б) полином $x^2 - x - 2$ трансформисати у $4x^2 + 3x$?

3. Да ли постоји комплексан број z такав да тачке одређене бројевима 1, z^{2007} и z^{2008} чине темена правоуглог троугла?

4. За углове $\triangle ABC$ важи

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 2 : 3.$$

Израчунати обим овог троугла, ако је страница наспрам угла γ једнака $AB = 3$.

5. Нека је M произвољна тачка у $\triangle ABC$, R_1, R_2, R_3 растојања тачке M од тачака A, B, C, редом, а r_1, r_2, r_3 растојања тачке M од страница BC, CA, AB, редом. Доказати да је

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2\,(r_1 + r_2 + r_3)\,.$$

Други разред, Б категорија

1. Одредити све тачке M унутар троугла ABC, такве да су површине троуглова MAB, MBC и MCA једнаке.

2. Нека је $z_1 = 1 + 2i$. Одредити комплексан број z ако је

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \quad \wedge \quad \operatorname{Re}\left(\frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}\right) = 2.$$

3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x}\,.$$

4. Видети први задатак за други разред А категорије.

5. Марија је први уторак у месецу провела у Београду, а први уторак после првог понедељка у месецу провела је у Новом Саду. Следећег месеца, Марија је прву среду провела у Нишу, а прву среду после првог уторка у месецу на Златибору. Где је Марија те године провела 8. март?

Трећи разред , А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (1-a)z & = & a, \\ (1-a)x & - & y & + & z & = & -1, \\ x & + & (a-1)y & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. У купу је уписана лопта. Доказати да је однос површина купе и лопте једнак односу њихових запремина.

3. Нека је $x > 0$ реалан број. Одредити поредак бројева (сортирати по величини)

$$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ таква да:

1° $f(1) = 0$;

2° $f(p) = 1$ за сваки прост број p;

3° $f(ab) = af(b) + bf(a)$ за све природне a и b.

Одредити све n за које је $f(n) = n$.

5. У сваком пољу табле 12×2008 уписан је по један природан број. Једним потезом је дозвољено удвостручити све бројеве неке врсте или смањити за 1 све бројеве неке колоне. Да ли се увек после неког броја потеза може добити таблица у којој су сви бројеви једнаки 0?

Трећи разред , Б категорија

1. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

2. Доказати да једначина

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{6}\right) = \frac{1}{x^2} + x^2$$

нема решења у скупу реалних бројева.

3. На кошаркашком турниру учествовало је 8 екипа и свака је са сваком одиграла по једну утакмицу. За победу се добија два поена, а поражена екипа добија 0 поена (нема нерешених утакмица). Екипе су сакупиле редом 14,12,8,8,6,4,2,2 поена. Колико утакмица су последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе?

4. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcl} \log_{|x-y|} \dfrac{xy}{2} & = & 2, \\ x + y & = & xy + 1. \end{array}$$

5. Видети други задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Одредити за које $a, b \in \mathbb{R}$ графици функција

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \quad \text{и} \quad g(x) = b \cdot 2^{-x} + a$$

имају тачно две заједничке тачке. Одредити те тачке.

2. Одредити све природне бројеве n за које је $5^n + 12^n$ потпун квадрат.

3. Ако је $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} < n \cdot \sqrt[n]{a_0^2}$, доказати да бар једно решење једначине

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

није реалан број.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а a, b и c одговарајуће странице. Доказати да је

$$\frac{AH}{a} \cdot \frac{BH}{b} \cdot \frac{CH}{c} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}\,.$$

5. На колико различитих начина се могу поређати шест томова енциклопедије на полицу, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу, 2. том се налази поред 3. тома, а 5. и 6. том се не налазе један поред другог?

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0, \\ x & + & ay & - & 3z & = & 1, \\ ax & - & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

2. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$, при чему је $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$ и $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

3. Видети трећи задатак за трећи разред Б категорије.

4. У лопту полупречника r уписан је ваљак највеће могуће површине омотача. Одредити запремину тог ваљка.

5. Видети први задатак за четврти разред А категорије.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Кроз пресечне тачке A и B кружница k_1 и k_2 конструисане су две паралелне праве које по други пут секу кружницу k_1 у тачкама C и D, а кружницу k_2 у тачкама E и F. Доказати да је $CD = EF$.

2. **(а)** На колико начина се могу изабрати два несуседна двоцифрена броја?

(б) Колико има петоцифрених бројева у којима се цифра 5 појављује тачно два пута и чије су преостале три цифре различити елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$?

3. Колико се највише топова може поставити на „шаховску” таблу димензија 5×4, тако да сваки топ „напада” највише једног од преосталих? (Неки топ „напада” све топове који су у врсти у којој се и он налази, као и све топове који су у колони у којој се он налази.)

4. За $x, y, z \in \mathbb{Z}$ важи

$$x^2z + y^2x + z^2y = x^2y + y^2z + z^2x + x + y + z.$$

Доказати да $27 \mid x + y + z$.

5. Нека је $\triangle ABC$ такав да је $AB = 3$, $BC = 4$ и $CA = 2$. Наћи изломљену линију XYZ са крајевима X, Z на рубу $\triangle ABC$, такву да је $XY = YZ = 1$ и која дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина.

Први разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leqslant 0.$$

2. Нека су E и F, редом, средишта страница AB и CD четвороугла $ABCD$. Ако су средишта дужи AF, CE, BF и DE неколинеарне тачке, доказати да чине темена паралелограма.

3. Одредити све $a, b \in \mathbb{Q}$ такве да је

$$(a - \sqrt{2})(6 - a + \sqrt{2}) = b.$$

4. Видети први задатак за први разред А категорије.

5. Видети други задатак за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}\,.$$

2. Око једнакостраничног $\triangle ABC$ је описана кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада теме A. Доказати да је $MA = MB + MC$.

3. Нека су $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ такви да важи

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta}\,.$$

Одредити могуће вредности $\alpha + 2\beta$.

4. Нека су реални бројеви a и b такви да им је разлика једнака фиксном броју α, а производ једнак фиксном позитивном броју β. Одредити све полиноме облика $x^2 + px + q$ такве да, какви год били бројеви a и b са горе наведеном особином, $\max\{a, b\}$ је корен тог полинома, где су p и q изражени у зависности од α и β.

5. У приземљу зграде од 5 спратова, у лифт су ушли Аца, Душан, Лука, Наташа и Цеца. На колико начина се лифт може испразнити тако да ни у једном тренутку неки мушкарац и нека жена не буду сами у лифту? (Свако од њих излази на неком од 5 спратова; лифт се креће од приземља до 5. спрата (не враћа се).)

Други разред, Б категорија

1. Одредити све $z \in \mathbb{C}$ за које је

$$\left|\frac{z}{1 - iz}\right| = 1.$$

2. Видети први задатак за други разред А категорије.

3. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да корени квадратне једначине

$$(2a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 7 = 0$$

буду већи од 1.

4. Нека права p не садржи ниједно теме неког правилног 2008-угла. Одредити највећи број дужи чији су крајеви темена тог 2008-угла које сече права p.

5. Видети други задатак за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$, симетрала $\sphericalangle BAC$ сече BC у тачки D; права која садржи D и паралелна је са AC сече AB у тачки E; права која садржи E и паралелна је са BC сече AC у тачки F. Доказати да је $AE = FC$.

2. Испитати да ли је $\operatorname{tg} 1^\circ$ рационалан број.

3. Нека су $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ реални бројеви такви да је

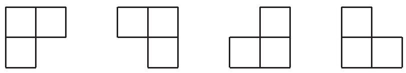
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1.$$

Доказати да је

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \leqslant 1.$$

4. На колико се најмање тетраедара може исећи коцка?

5. L-тримино је фигура састављена од три јединична квадрата, неког од облика



Одредити најмање m, тако да је из квадратне мреже димензија 5×5 (састављене од 25 јединичних квадрата) могуће изрезати m L-тримина, а притом се из остатка не може изрезати више ниједан L-тримино. (Приликом изрезивања, квадрати који чине L-тримино се морају поклапати са квадратима мреже.)

Трећи разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 1.$$

2. Одредити угао који граде вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако су вектори $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} + 5\vec{b}$ међусобно ортогонални и $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$.

3. Видети трећи задатак за други разред А категорије.

4. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

5. Видети пети задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

има бар једно решење у скупу реалних бројева.

2. Одредити све $m \in \mathbb{R}$, тако да корени једначине

$$x^3-12x^2+mx-60=0$$

представљају дужине страница правоуглог троугла.

3. Нека су A и B тачке неке кружнице, а P и Q тачке, такве да су праве AP и BQ тангенте на ту кружницу, $AP = BQ$ и права PQ није паралелна са правом AB. Доказати да права AB полови дуж PQ.

4. Да ли постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, која није идентички једнака некој функција

$$g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g_k(n) = n^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

таква да је $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ за све $m, n \in \mathbb{N}$ и да је $f(2008)$ потпун квадрат?

5. Колико има низова нула и јединица дужине 10, таквих да се међу свака три узастопна члана низа налази највише једна јединица?

Четврти разред, Б категорија

1. Доказати да је за сваки прост број $p \geqslant 5$, полином $(x+1)^p - x^p - 1$ дељив полиномом x^2+x+1.

2. Израчунати интезитет вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ јединични вектори, такви да је угао између било која два од њих $\dfrac{\pi}{3}$.

3. Одредити на колико се начина могу распоредити 4 куглице у 7 кутија, ако се

(а) и куглице и кутије разликују;

(б) не разликују ни кутије ни куглице.

4. Видети први задатак за четврти разред А категорије.

5. Видети други задатак за четврти разред А категорије.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

Први разред, А категорија

1. Одредити на колико начина се могу изабрати природни бројеви a, b и c тако да важи:

1° $a < b < c < 52$; 2° a дели c; 3° b дели c;

4° a и b нису дељиви квадратом природног броја већег од 1;

5° c јесте дељив квадратом природног броја већег од 1.

2. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и $\sphericalangle CAB = 15^\circ$. Нека је M тачка на полуправој BC таква да је $\overrightarrow{BM} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$. Одредити углове троугла ABM.

3. Одредити остатак при дељењу полинома $x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$ полиномом $(x-1)^3$.

4. Око троугла ABC описати једнакостраничан троугао PQR највеће могуће дужине странице ($\triangle PQR$ је описан око $\triangle ABC$ ако је $A \in QR$, $B \in RP$, $C \in PQ$).

5. Доказати да постоји природан број n такав да је број $2p^n + 3$ сложен за сваки прост број p.

Први разред, Б категорија

1. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да је број $(a+b)^6 - a^6$ дељив бројем $a^2 + ab + b^2$.

2. Доказати да је број $3^{105} + 4^{105}$ дељив са $49 \cdot 181$.

3. Нека је P тачка у унутрашњости $\triangle ABC$, таква да је $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$. Нека су M и K подножја нормала из тачке P на странице BC и AC, редом. Ако је D средиште странице AB, доказати да је $DK = DM$.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Капетан је добио задатак да распореди 12 војника (различитих по висини) у 3 врсте по 4 војника, тако да су испуњени следећи услови:

1° сваки војник је нижи од свих војника који се налазе иза њега (у осталим врстама);

2° сваки војник је нижи од свих војника који се налазе десно од њега (у његовој врсти);

3° у последњој врсти се налазе 4 највиша војника.

На колико начина капетан то може учинити?

Други разред, А категорија

1. У скупу целих бројева решити $n(n+1)(n+2) = m^2$.

2. Нека је $n > 1$ природан број, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цели бројеви, тако да важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + n^3 \leqslant (2n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + n^2.$$

Доказати да су сви a_i ненегативни и да број $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n + 1$ није потпун квадрат.

3. У $\triangle ABC$ важи $\sphericalangle CAB = 2 \cdot \sphericalangle BCA$. Нека је N центар споља приписане кружнице $\triangle ABC$ који додирује страницу BC, а тачка M средиште странице AC. Ако је пресек дужи BC и NM тачка P, доказати да је $AB = BP$.

4. На страницама правилног петоугла $ABCDE$ уочено је n различитих тачака (међу уоченим тачкама могу бити и тачке A, B, C, D и E). Испоставило се да постоји тачно 2008 троуглова чија су сва темена неке од тих тачака (троугао је одређен са три неколинеарне тачке). Колики је најмањи могући број уочених тачака?

5. У болницу је доведено 10 оболелих особа. Међу 1000 флаша у магацину, само у једној се налази лек. Уколико неко од тих особа попије макар једну кап из флаше у којој се налази лек, након 24 сата лекар ће приметити симптоме оздрављења. Лекар има задатак да у року од 24 сата открије флашу у којој се налази лек, да би се припремио за могућу епидемију. Доказати да лекар може да обави свој задатак.

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити

$$|x^2 + x - 2| = 4x + 2.$$

2. Нека су D, E и F подножја висина из тачака A, B и C, редом, оштроуглог троугла ABC. Доказати да је

$$BD \cdot CD = DE \cdot DF.$$

3. У скупу реалних бројева решити

$$4 \cdot \sqrt{\frac{2^x - 1}{2^x}} + \sqrt{14} \leqslant 14 \cdot \sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x - 1}}.$$

4. Познато је да је $3^7 = 2187 > 2048 = 2^{11}$. Доказати да важи

$$(\log_{24} 48)^2 + (\log_{12} 54)^2 > 4.$$

5. Колико најмање ђака може бити у групи у којој важи следеће – сваки ђак познаје најмање шест ђака, и не постоје три ђака која се међусобно познају (познанства су узајамна)?

Трећи разред, А категорија

1. Положај велике и мале казаљке на сату назива се *двоструко могућим* ако ће заменом места велике и мале казаљке оне опет коректно показивати неко време. Колико има двоструко могућих положаја казаљки?

2. Нека је $n > 1$ природан број. Одредити коефицијент уз $x^{\frac{n^2+n-4}{2}}$ у развоју полинома

$$(x+1)^1 \cdot (x+2)^2 \cdot \ldots \cdot (x+n)^n.$$

3. У свако поље таблице 8×7 уписан је број на следећи начин: у поље (i, j) које се налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне уписан је број $i \cdot (2j+1)$. У тако добијеној таблици дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 или квадрат 4×4 и повећати за 1 сваки број у пољима изабраног квадрата. Да ли се полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни?

4. У скупу природних бројева решити

$$7^x + 12^y = 13^z.$$

5. Нека је $d > 0$ реалан број. Конструисати правоугаоник $MNPQ$ дијагонале $NQ = d$ уписан у дати троугао ABC, тј. правоугаоник коме страница MN припада правој одређеној са AB, а темена P и Q припадају страницама BC и CA, редом.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да се кружнице

$$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 12 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + y^2 + 2x - 9y + 15 = 0$$

додирују изнутра и одредити једначину њихове заједничке тангенте.

2. Нека је $SABC$ тространа пирамида, чији су сви ивични углови код врха S прави и нека је O подножје висине из тачке S на раван ABC.

(а) Доказати да је O ортоцентар троугла ABC.

(б) Ако су површине троуглова ABC и OBC једнаке P_1 и P_2, редом, одредити површину троугла SBC.

3. У скупу реалних бројева решити

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}\right) \geqslant \operatorname{sgn}\left(\log_x 5^{\sqrt{1-x}}\right)$$

4. Да ли се у равни може конструисати

(а) 2006; **(б)** 2007; **(в)** 2008

подударних кружница, тако да свака од њих додирује тачно 3 друге кружнице и никоје две кружнице се не секу?

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Низ природних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан је са $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = 3^{a_n}$ за $n \geqslant 1$. Одредити последње две цифре броја a_{2008}.

2. Нека је $ABCDEF$ шестоугао уписан у кружницу полупречника 1, тако да су странице AB, CD, EF дужине 1. Доказати да средишта страница BC, DE и AF формирају једнакостранични троугао.

3. Нека су α, β и γ све нуле полинома $x^3 - 9x + 9$. Доказати да је

$$\alpha^2 + \alpha - 6 \in \{\beta, \gamma\}.$$

4. У скупу реалних бројева решити

$$2008^{\log_{2006}(x-1)} - 2006^{\log_{2008}(x+1)} = 2.$$

5. 100 сијалица је поређано у таблу 10×10, при чему свака може да буде упаљена или угашена. У једном кораку је дозвољено:

1° променити стања свих сијалица у једној врсти;

2° променити стања свих сијалица у једној колони;

3° упалити произвољну сијалицу која је окружена са 4 упаљене (сијалице које окружују сијалицу S су оне које се налазе на пољима која имају заједничку страницу са пољем на коме се налази S).

У почетку су све сијалице угашене. Да ли је могуће низом оваквих корака постићи да све сијалице осим једне у углу и једне њој суседне буду угашене?

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$\sqrt{x - 4a + 16} - 2 \cdot \sqrt{x - 2a + 4} + \sqrt{x} = 0.$$

2. Ако је O пресечна тачка дијагонала AC и BD правилног петоугла $ABCDE$, доказати да је

$$AO^2 = AC \cdot OC.$$

3. Нека су m и n природни бројеви. Доказати да је број $m^{4n+1} - m$ дељив са 30.

4. Одредити све комплексне бројеве z, тако да тачке које одговарају бројевима $1, z, z^2$ и z^3 (не обавезно у датом поретку) чине темена паралелограма.

5. У скупу реалних бројева решити

$$\log_{x^2}(2 - x^2) + \log_{x^2+5x+7}(5x + 7) \leqslant 1.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Како је $5^{10^{5^{10}}}$ непаран број, следи да је

$$10^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv (-1)^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv -1 \pmod{11}.$$

Како је $5^5 = 5 \cdot 25 \cdot 25 \equiv 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$ и како је број $10^{5^{10^5}}$ дељив са 5, следи $5^{10^{5^{10^5}}} \equiv 1 \pmod{11}$.

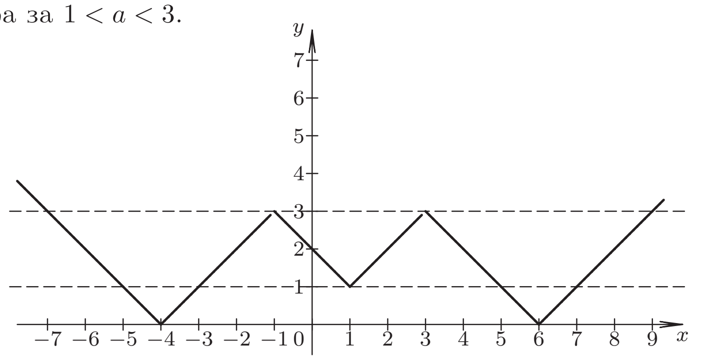
Следи $10^{5^{10^{5^{10}}}} + 5^{10^{5^{10^5}}} \equiv -1+1 = 0 \pmod{11}$, да овај број је дељив са 11 (Тангента 49, стр. 12, М644, Наградни задаци, решење у Тангенти 50, стр. 11).

2. Нека је $f(x) = \Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|$.

Како је $|x-1|-2 = \begin{cases} -x-1, & \text{за } x<1 \\ x-3, & \text{за } x \geqslant 1 \end{cases}$, следи да је $\big||x-1|-2\big|-3 =$

$$\begin{cases} -x-4, & \text{за } x<-1 \\ x-2, & \text{за } -1 \leqslant x<1 \\ -x, & \text{за } 1 \leqslant x<3 \\ x-6, & \text{за } x \geqslant 3 \end{cases}, \text{ па је } f(x) = \begin{cases} -x-4, & \text{за } x<-4 \\ x+4, & \text{за } -4 \leqslant x<-1 \\ 2-x, & \text{за } -1 \leqslant x<1 \\ x, & \text{за } 1 \leqslant x<3 \\ 6-x, & \text{за } 3 \leqslant x<6 \\ x-6, & \text{за } x \geqslant 6 \end{cases}.$$

Права паралелна x-оси може сећи овај график у највише 6 тачака, што се догађа за $1 < a < 3$.



ОП 08 1А 2

3. Нека тачке O, A, B, C, K, L, D одговарају Ољиној кући, Аниној кући, банки, цркви, Костиној кући, Лазиној кући, дрвету, редом. По условима задатка $OACB$ је позитивно оријентисан паралелограм. Заиста, из $OB = OC$ и $BC = OA$ следи да је $OACB$ паралелограм (ако би $OACB$ имао самопресецања, тј. ако би се OB и AC секле, тада би $OABC$ био квадрат, тачка L би била његово средиште, а како је тачка K средиште дужи BC, а D пресек дужи AK и OB, било би $O-L-D$, тј. Ољa би дошла до Лазе пре сусрета са Аном), а оријентација из податка да је $\sphericalangle AOB < 180°$. Из услова задатка је и K средиште дужи BC, L средиште дужи AC, а D пресек дужи OL и AK.

Нека је $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Тада је

$$\overrightarrow{OD} = m \cdot \overrightarrow{OL} = m \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}\right) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AD} = n \cdot \overrightarrow{AK} = n \cdot \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{a}\right).$$

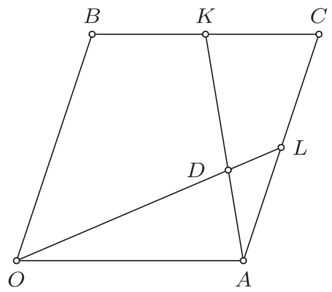
Како је $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$, следи $m \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} + n \cdot \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{a}\right)$, одакле је

$$\left(m + \frac{1}{2} \cdot n - 1\right) \cdot \vec{a} + \left(\frac{1}{2} \cdot m - n\right) \cdot \vec{b} = \vec{o},$$

па како су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколинеарни мора бити

$m + \frac{1}{2} \cdot n - 1 = 0$ и $\frac{1}{2} \cdot m - n = 0$.

Решавањем овог система добија се $m = \frac{4}{5}$ и $n = \frac{2}{5}$, одакле је $\overrightarrow{KD} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{KA}$, па ће Ана од Костине куће до старог дрвета прећи пут дужине $1,2km$.



ОП 08 1А 3

4. Нека је количина траве коју поједе једна крава за један дан x, количина траве која израсте на ливади за један дан y, а почетна количина траве на ливади z. По условима задатка је

$$24 \cdot 60x = z + 24y \quad \text{и} \quad 60 \cdot 30x = z + 60y,$$

одакле је $y = 10x$ и $z = 24 \cdot 60x - 24 \cdot 10x = 24 \cdot 50x$.

Из $y = 10x$ следи да је одговор на питање дела (б) никад, јер за један дан израсте тачно онолико траве колико 10 крава попасе.

Ако a крава попасе ливаду за 100 дана, следи $a \cdot 100x = z + 100y = 24 \cdot 50x + 1000x = 22 \cdot 100x$, одакле је $a = 22$, тј. одговор на питање дела (а) је 22 краве.

5. Уоченом избору 5 књига тако да никоје две изабране књиге нису суседне, може се придружити низ нула и јединица, тако што је i-ти члан низа 1 ако је i-та књига изабрана, а 0 ако није. Овако добијен низ се састоји од 9 нула и 5 јединица и притом никоје две јединице нису суседне.

Међутим, и сваком низу који се састоји од 9 нула и 5 јединица и притом никоје две јединице нису суседне одговара један избор књига који задовољава услове задатка, па тражених избора има колико оваквих низова.

Са друге стране, овакав низ се може видети као распоређивање 5 јединица на 10 места (пре прве нуле, између i-те и $i+1$-ве нуле за $i \in \{1, 2 \ldots, 8\}$ и после 9-те нуле), па је укупан број оваквих низова $\binom{10}{5} = 252$ (Тангента 48, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2).

Први разред, Б категорија

1. Како петоцифрених бројева записаних непарним цифрама има 5^5 (свака од 5 цифара може се изабрати на 5 начина), а петоцифрених бројева записаних цифрама $\{3,5,7,9\}$ има 4^5 (свака од 5 цифара може се изабрати на 4 начина), то петоцифрених бројева записаних непарним цифрама, међу којима је бар једна јединица има 5^5-4^5 (Тангента 48, стр. 37, Писмени задаци, задатак 18).

2. Нека је $5p+1=x^2$ за неко $x\in\mathbb{N}$. Следи $5p=(x-1)(x+1)$, па како су 5 и p прости, постоје следеће могућности:

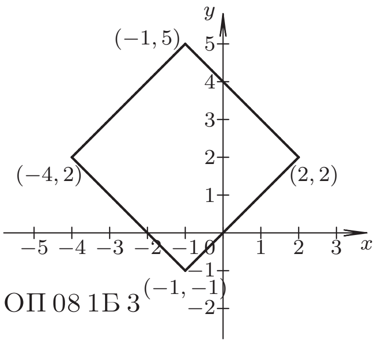
1. $x-1=5$, $x+1=p$, одакле је $p=7$ $(5\cdot 7+1=6^2)$;
2. $x+1=5$, $x-1=p$, одакле је $p=3$ $(5\cdot 3+1=4^2)$;
3. $x-1=1$, $x+1=5p$, одакле је $5p=3$, тј. у овом случају нема решења (тривијално не може бити $x-1=5p$, $x+1=1$, јер је $5p>1$ и $x-1<x+1$).

Дакле, p може бити 3 или 7 (Тангента 44, стр. 36, Писмени задаци, задатак 16).

3. Како је $|a|=\begin{cases} a, & \text{за } a\geqslant 0\\ -a, & \text{за } a<0\end{cases}$, следи да је линија из задатка

$$\begin{aligned}
x+1+y-2=3, &\quad \text{тј. } y=4-x, &&\text{за } x\geqslant -1\wedge y\geqslant 2,\\
x+1-y+2=3, &\quad \text{тј. } y=x, &&\text{за } x\geqslant -1\wedge y<2,\\
-x-1+y-2=3, &\quad \text{тј. } y=6+x, &&\text{за } x<-1\wedge y\geqslant 2,\\
-x-1-y+2=3, &\quad \text{тј. } y=-x-2, &&\text{за } x<-1\wedge y<2,
\end{aligned}$$

односно квадрат чија су темена $(-1,5)$, $(-1,-1)$, $(2,2)$ и $(-4,2)$ (на пример убацивањем $x=-1$ и $y=2$ у горње једначине). Дијагонала овог квадрата је $6=5-(-1)=2-(-4)$, па је тражена површина $\dfrac{6\cdot 6}{2}=18$ (Тангента 44, стр. 35, Писмени задаци, задатак 10).



ОП 08 1Б 3

4. Видети решење првог задатка за први разред А категорије.

5. Видети решење четвртог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $p=2^{2^n}+1=k^5-l^5=(k-l)(k^4+k^3l+k^2l^2+kl^3+l^4)$ за неке $k,l\in\mathbb{N}$. Како је p прост и $k^4+k^3l+k^2l^2+kl^3+l^4>k-l$, следи да је $k-l=1$, па је $2^{2^n}+1=(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$, одакле је $2^{2^n}=5(k^4+2k^3+2k^2+k)$, што је немогуће (5 не може делити степен двојке) (Тангента 47, стр. 16, Наградни задаци, М609, решење у Тангенти 48, стр. 17).

2. Заменом a и c добија се трином cx^2+bx+a, чија је дискриминанта једнака дискриминанти полазног тринома.

Друга операција чува разлику нула једначине $ax^2+bx+c=0$. Како за дискриминанту тринома ax^2+bx+c важи $b^2-4ac=a^2\left(\dfrac{b^2}{a^2}-4\cdot\dfrac{c}{a}\right)=a^2\cdot\big((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\big)=a^2(x_1-x_2)^2$, где су x_1 и x_2 нуле једначине $ax^2+bx+c=0$ (по Виетовим правилима је $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$) ни друга операција не мења дискриминанту.

Како је дискриминанта тринома x^2-x-2 једнака $(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9$, а тринома x^2-x-1 једнака $(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5$, следи да је одговор на питање дела (а) негативан (Тангента 44, стр. 18, Наградни задаци, М548, решење у Тангенти 45, стр. 20).

Одговор на питање дела (б) је позитиван, јер је (на пример):

$$x^2-x-2 \xrightarrow{2^\circ \text{ за } x=-2} x^2-5x+4 \xrightarrow{1^\circ} 4x^2-5x+1 \xrightarrow{2^\circ \text{ за } x=1} 4x^2+3x.$$

3. Постоји. Нека је $|z|=1$. Тада је $|z^{2008}|=|z|^{2008}=1$ и $|z^{2007}|=|z|^{2007}=1$, односно тачке које одговарају бројевима z^{2007} и z^{2008} налазе се на јединичној кружници. Уколико постоји број z такав да је $z^{2007}=-1$ и $z^{2008}\notin\{1,-1\}$, тада је троугао чија су темена тачке одређене бројевима 1, z^{2007} и z^{2008} правоугли (хипотенуза тог троугла је дуж одређена тачкама које одговарају бројевима 1 и z^{2007}), па је довољно доказати да постоји број z са наведеним особинама.

Нека је $z_0=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тада је $z_0^3=-1$, па је $z_0^{2007}=(z_0^3)^{669}=(-1)^{669}=-1$ и $z_0^{2008}=z_0\cdot z_0^{2007}=-z_0\notin\{-1,1\}$, односно z_0 је број са траженим особинама.

4. По условима задатка сва три тангеса су истог знака, па је $\triangle ABC$ оштроугли. Како је $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\pi-(\alpha+\beta))=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, следи да (у произвољном неправоуглом троуглу) важи

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma. \qquad (*)$$

Ако је $k=\operatorname{tg}\alpha$, тада је $\operatorname{tg}\beta=2k$ и $\operatorname{tg}\gamma=3k$, па из $(*)$ следи $6k=6k^3$, односно $k=1$ (јер је $k>0$).

Како су углови оштри, следи $\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\beta=\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma=\dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, па је $BC=AB\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\sqrt{5}$

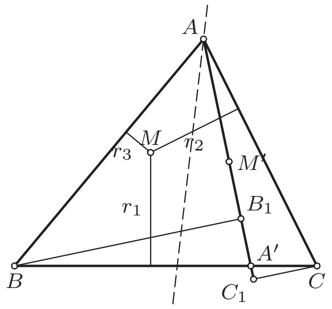
и $AC = AB \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 2\sqrt{2}$ (синусна теорема).

Коначно, обим $\triangle ABC$ је $AB + BC + CA = 3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$. (Тангента 45, стр. 18, Наградни задаци, M579, решење у Тангенти 46, стр. 27).

5. Ако је M' тачка симетрична са M у односу на симетралу $\sphericalangle BAC$, растојање тачке M' од правих AB и AC је r_2 и r_3, редом, и тачка M' се налази у $\sphericalangle BAC$, па права AM' сече дуж BC у некој тачки A'. Нека су B_1 и C_1 подножја нормала из B и C, редом, на AM'. Како је $BC = BA' + A'C \geqslant BB_1 + CC_1$ и $AM' = R_1$, следи

$$BC \cdot R_1 \geqslant BB_1 \cdot R_1 + CC_1 \cdot R_1 = 2 \cdot P(\triangle M'AB) + 2 \cdot P(\triangle M'AC)$$

($P(\triangle XYZ)$ представља површину $\triangle XYZ$), одакле је $aR_1 \geqslant cr_2 + br_3$, тј. $R_1 \geqslant \dfrac{c}{a} \cdot r_2 + \dfrac{b}{a} \cdot r_3$.



ОП 08 2А 5

Аналогно је $R_2 \geqslant \dfrac{a}{b} \cdot r_3 + \dfrac{c}{b} \cdot r_1$ и $R_3 \geqslant \dfrac{b}{c} \cdot r_1 + \dfrac{a}{c} \cdot r_2$, одакле је (како за $x, y > 0$ важи $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$)

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) r_1 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) r_2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) r_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Једнакост важи ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан, а тачка M његово тежиште (Тангента 49, стр. 5, Неке неједнакости у вези са троуглом, неједнакост (Б)).

Напомена. Ова неједнакост је позната и као Erdős–Mordell-ова неједнакост.

Други разред, Б категорија

1. Како је површина $\triangle ABC$ једнака збиру површина троуглова MAB, MBC и MCA, ове три површине су једнаке трећини површине $\triangle ABC$.

Како $\triangle ABC$ и $\triangle MAB$ имају заједничку страницу AB и како је однос њихових површина $3:1$, висина $\triangle ABC$ која одговара страници AB је три пута већа од висине $\triangle MAB$ која одговара страници AB, тј. тачка M се налази на правој паралелној правој AB, која се налази у истој полуравни одређеној правом AB у којој и тачка C и која је на растојању од праве AB једнаком трећини висине $\triangle ABC$ која одговара страници AB.

Аналогно, тачка M се налази на правој паралелној правој BC, која се налази у истој полуравни одређеној правом BC у којој и тачка A и која је на растојању од праве BC једнаком трећини висине $\triangle ABC$ која одговара страници BC, па (ако постоји) тачка M мора бити јединствена (праве паралелне двема различитим страницама неког троугла нису паралелне, па се секу).

Са друге стране, како тежиште троугла дели тежишне дужи у односу $2:1$, растојање од тежишта троугла до неке странице тог троугла је једнако трећини висине која одговара тој страници, па тежиште троугла задовољава услове задатка.

Дакле, једина тачка која задовољава услове задатка је тежиште троугла.

2. Изрази из задатка су дефинисани за $z \neq 2$. Како је (за $z \neq 2$)

$$\left|\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{z-3}{2-\overline{z}} \cdot \overline{\left(\frac{z-3}{2-\overline{z}}\right)} = 1 \Leftrightarrow (z-3)(\overline{z}-3) = (2-\overline{z})(2-z)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z} - 3\overline{z} - 3z + 9 = z\overline{z} - 2\overline{z} - 2z + 4 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 5,$$

одакле је $\operatorname{Re} z = \dfrac{5}{2}$, јер је $\omega + \overline{\omega} = 2 \cdot \operatorname{Re} \omega$ за свако $\omega \in \mathbb{C}$.

Слично је

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left(\frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i} + \overline{\left(\frac{2z-9i}{\overline{z_1}+i}\right)} = 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2z-9i}{1-i} + \frac{2\overline{z}+9i}{1+i} = 4 \Leftrightarrow (2z-9i)(1+i) + (2\overline{z}+9i)(1-i) = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & 2z - 9i + 2iz + 9 + 2\overline{z} + 9i - 2i\overline{z} + 9 = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & -2i(z-\overline{z}) = 10 + 2(z+\overline{z}) = 10 + 4 \cdot \operatorname{Re} z.
\end{aligned}$$

Како је $\operatorname{Re} z = \dfrac{5}{2}$ и како је $\omega - \overline{\omega} = 2i \cdot \operatorname{Im} \omega$ за свако $\omega \in \mathbb{C}$, следи $4 \cdot \operatorname{Im} z = 20$, тј. $\operatorname{Im} z = 5$.

Дакле, $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \dfrac{5}{2} + 5i$ (Тангента 41, стр. 32, Писмени задаци, задатак 5).

3. Једначина из задатка није дефинисана за $x \in \{-2, 0, 2\}$.

За $x \neq -2, 0, 2$ важи

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} &= \frac{1}{x^2-2x} \\
\Leftrightarrow \quad 2x + (x-4)(x-2) &= x+2 \\
\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 &= 0,
\end{aligned}$$

а последња квадратна једначина има решења $x = 2$ и $x = 3$.

Међутим, како једначина није дефинисана за $x = 2$, једино решење је $x = 3$ (Тангента 42, стр. 42, Писмени задаци, задатак 1).

4. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

5. Ако први уторак у месецу није и први дан у месецу, први уторак у месецу је истовремено и први уторак после првог понедељка у месецу, па по условима задатка следи да је први уторак у првопоменутом месецу и први дан тог месеца. Аналогно, у следећем месецу је среда први дан тог месеца.

Дакле, првопоменути месец има $7k+1$ дана (за неко $k \in \mathbb{N}$), а како месеци имају 28, 29, 30 или 31 дан, следи да је тај месец фебруар и да је година преступна.

Дакле, следећи месец је март, а 8. март је прва среда после првог уторка у том месецу, тј. Марија је 8. март провела на Златибору.

Трећи разред, А категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 4 = (a-2)^2(a+1), \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1-a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix} = a + 0 + (a-1)^2 - a(a-1) - 1 - 0 = 0, \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + a - a^2 = -(a-2)(a+1), \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1-a & -1 & -1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a^3 + 2a^2 + a - 2 = -(a-2)(a+1)(a-1),
\end{aligned}$$

за $a \notin \{-1, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па систем за ове a има једно решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(0, -\frac{1}{a-2}, -\frac{a-1}{a-2}\right).$$

За $a = 2$ прва једначина система гласи $x+y-z=2$, а трећа $x+y-z=0$, па у овом случају систем нема решења (што се могло закључити и из тога што је $a=2$ двострука нула Δ, а једнострука Δ_y и Δ_z).

За $a = -1$ систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & 2z & = & -1, \\
2x & - & y & + & z & = & -1, \\
x & - & 2y & - & z & = & 0.
\end{array}$$

Одузимањем прве једначине од треће, односно двоструке прве једначине од друге, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & 2z & = & -1, \\
 & - & 3y & - & 3z & = & 1, \\
 & - & 3y & - & 3z & = & 1,
\end{array}$$

односно

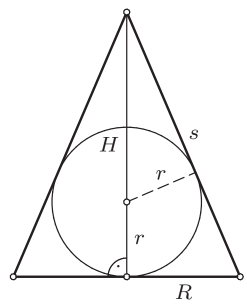
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1, \\ & - & 3y & - & 3z & = & 1, \end{array}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = -z - \dfrac{1}{3}$ и $x = -1 - y - 2z = -1 + z + \dfrac{1}{3} - 2z = -z - \dfrac{2}{3}$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

$$\left\{ \left(-z - \frac{2}{3}, -z - \frac{1}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

(Тангента 42, стр. 39, Писмени задаци, задатак 4).

2. Нека је r полупречник лопте, а R, H и s полупречник основе, висина и изводница купе описане око те лопте, редом. Изражавањем површине осног пресека купе на два начина, добија се $RH = (R+s)r$, одакле је $\dfrac{RH}{r} = R + s$, па је $\dfrac{R^2H}{4r^3} = \dfrac{R(R+s)}{4r^2}$, односно $\dfrac{\frac{1}{3} \cdot R^2 H\pi}{\frac{4}{3} \cdot r^3\pi} = \dfrac{R(R+s)\pi}{4r^2\pi}$, тј. $\dfrac{V_K}{V_L} = \dfrac{P_K}{P_L}$.



ОП 08 ЗА 2

3. Ако је $x = 1$ сви наведени бројеви су међусобно једнаки.

Нека је $0 < x < 1$. Како је експоненцијална функција строго монотоно опадајућа ако јој је основа мања од 1, следи $0 < x < 1 \;\Rightarrow\; x^0 > x^x > x^1$

$$\Rightarrow\; x^1 < x^{x^x} < x^x \;\Rightarrow\; x^x > x^{x^{x^x}} > x^{x^x} \;\Rightarrow\; x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}},$$

па је (за $0 < x < 1$) тражени распоред

$$x < x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}} < x^x.$$

Нека је $x > 1$. Како је експоненцијална функција строго монотоно растућа ако јој је основа већа од 1, следи

$$1 < x \;\Rightarrow\; x^1 < x^x \;\Rightarrow\; x^x < x^{x^x} \;\Rightarrow\; x^{x^x} < x^{x^{x^x}} \;\Rightarrow\; x^{x^{x^x}} < x^{x^{x^{x^x}}},$$

па је (за $x > 1$) тражени распоред

$$x < x^x < x^{x^x} < x^{x^{x^x}} < x^{x^{x^{x^x}}}.$$

4. Из услова 3° задатка следи

$$\frac{f(ab)}{ab} = \frac{f(a)}{a} + \frac{f(b)}{b},$$

па ако је $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, захтев задатка постаје да се одреде сви $n \in \mathbb{N}$ такви да је $g(n) = 1$, где је $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ таква да:

1° $g(1) = 0$;

2° $g(p) = \dfrac{1}{p}$ за сваки прост број p;

3° $g(ab) = g(b) + g(a)$ за све природне a и b.

Из новог услова 3° следи да за $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (канонска факторизација броја n) важи $g(n) = \alpha_1 g(p_1) + \alpha_2 g(p_2) + \ldots + \alpha_k g(p_k)$, па треба одредити све n за које је

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1. \tag{‡}$$

Сви сабирци у претходној једнакости су позитивни, па је $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\})\ \alpha_i \leqslant p_i$. Након множења исте једнакости са $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, добија се једнакост у којој су сви сабирци сем једног дељиви са p_i, па и тај сабирак $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot \dfrac{\alpha_i}{p_i})$ мора бити дељив са p_i, па $p_i \mid \alpha_i$, одакле је $\alpha_i \geqslant p_i$ (за свако $\{1, 2, \ldots, k\}$).

Следи да су сви сабирци у (‡) једнаки 1, па се у тој једнакости појављује само један сабирак, односно тражени бројеви су бројеви облика p^p, где је p прост број (Тангента 44, стр. 18, Наградни задаци, М554, решење у Тангенти 45, стр. 22).

5. Нека је смањивање за 1 свих бројеве неке колоне прва, а удвостручавање свих бројева неке врсте друга операција и нека се на табли врши следећи алгоритам:

1° уочи се колона те табле;

2° примењује прва операција, док најмањи елемент те колоне не постане 1 (скуп $\mathbb{N}$ је ограничен одоздо, па је ово могуће урадити);

3° ако су сви елементи те колоне једнаки 1, алгоритам се завршава, а иначе се на све врсте које одговарају елементима те колоне који су једнаки 1 примени друга операција, а након тога врати на корак 2.

Алгоритам се завршава. Заиста, највећи број у тој колони (може их бити и више) се након прве операције смањи за 1, као и након примене корака 3° па 2° претходног алгоритма, па ће сви елементи уочене колоне у једном моменту постати једнаки 1. Поновном применом прве операције сви елементи те колоне постају 0.

Примена прве операције на некој колони не мења елементе осталих колона те табле, а примена друге операције природне бројеве слика у природне, док елементи који су једнаки 0 остају 0. Следи да су након горњег алгоритма сви бројеви других колона остали природни (ако су били природни), односно 0 (ако су били 0), па се понављањем алгоритма на свим колонама ове табле добија табла у којој су сви бројеви једнаки 0.

Трећи разред, Б категорија

1. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

2. Једначина из задатка је дефинисана за $x \neq 0$.

Како је $(\forall\varphi)|\sin\varphi| \leqslant 1$, следи да је

$$|L| = \left|2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{6}\right)\right| \leqslant 2 \cdot 1 \cdot 1.$$

На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, следи

$$D = \frac{1}{x^2} + x^2 \geqslant \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot x^2} = 2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x^2 = 1$, тј. $x \in \{-1, 1\}$.

Како је $L = D$, мора бити $L = D = 2$, тј. $x \in \{-1, 1\}$. Међутим, како је

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{1}{6}\right) \neq 2 \neq 2 \cdot \sin^2\left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{-1}{6}\right),$$

следи да ова једначина нема решења у $\mathbb{R}$ (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М591, решење у Тангенти 47, стр. 19).

3. Последње четири екипе су међусобно одиграле $\binom{4}{2} = 6$ мечева и у њима је освојено $6 \cdot 2 = 12$ поена. Сваки од ових поена је припао једној од последње четири екипе. Како су оне освојиле $6+4+2+2 = 14$ поена, последње четири екипе су у утакмицама против прве четири екипе освојиле $14-12 = 2$ поена, тј. последње четири екипе победиле су прве четири екипе у једној утакмици, односно последње четири екипе изгубиле од прве четири екипе у $4 \cdot 4 - 1 = 15$ утакмица (укупан број утакмица које су последње четири екипе одиграле против прве четири екипе је $4 \cdot 4 = 16$) (Тангента 49, стр. 13, Наградни задаци, М651, решење у Тангенти 50, стр. 14).

4. Једначине из задатка су дефинисане за $\frac{xy}{2} > 0$, $|x-y| > 0$ и $|x-y| \neq 1$.

Из друге једначине следи $(x-1)(y-1) = 0$, одакле је $x = 1$ или $y = 1$.

Ако је $y = 1$, из прве једначине следи $\dfrac{x}{2} = |x-1|^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, одакле је $2x^2 - 5x + 2 = 0$, тј. $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$. Међутим, ако је $x = 2$, тада је $|x - y| = |2 - 1| = 1$, па ово није решење.

Како је систем симетричан по x и y, за $x = 1$ добија се решење $y = \dfrac{1}{2}$.

Дакле, реална решења система из задатка су $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ и $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ (Тангента 42, стр. 47, Пријемни испити, задатак 13).

5. Видети решење другог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Из $a \cdot 2^x + b = b \cdot 2^{-x} + a$ добија се $a \cdot 2^{2x} + (b - a) \cdot 2^x - b$, одакле је $2^x = 1$ или $2^x = -\dfrac{b}{a}$. Дакле, графици f и g имају тачно две заједничке тачке ако и само ако је $ab < 0$ и $a \neq -b$ и тада су то тачке $(0, a + b)$ и $\left(\log_2\left(-\dfrac{b}{a}\right), 0\right)$.

2. Ако је n непаран (тј. $n = 2k + 1$ за неко $k \in \mathbb{N}_0$), тада је

$$5^{2k+1} + 12^{2k+1} \equiv 2 \cdot 2^{2k} \equiv 2 \cdot (-1)^k \pmod 5$$

и не може бити потпун квадрат, јер квадрати при дељењу са 5 могу давати остатке 0,1 или 4.

Ако је n паран (тј. $n = 2k$ за неко $k \in \mathbb{N}$) и $x^2 = 5^n + 12^n$ за неко $x \in \mathbb{N}$, тада је $5^{2k} = x^2 - 12^{2k} = (x - 12^k)(x + 12^k)$. Ако $5 \mid x - 12^k$ и $5 \mid x + 12^k$, тада $5 \mid 2 \cdot 12^k = (x + 12^k) - (x - 12^k)$, што је немогуће, па је $x - 12^k = 1$ и $x + 12^k = 5^{2k}$, одакле је $2 \cdot 12^k = 5^{2k} - 1 = 25^k - 1 > 24^k = 2^k \cdot 12^k$.

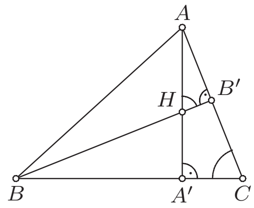
За $k \geqslant 2$ следи $2 \cdot 12^k > 2^k \cdot 12^k > 2 \cdot 12^k$, што је контрадикција. Провером, за $k = 1$ се добија решење, тј. $n = 2$ је једини природни број који задовољава услове задатка ($5^2 + 12^2 = 13^2$) (Тангента 45, стр. 17, Наградни задаци, М570, решење у Тангенти 46, стр. 23).

3. Ако би сва решења једначине из задатка ($x_1, x_2, \ldots, x_n$–има их n јер полином n-тог степена има n комплексних нула) били реални бројеви, тада би на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине било $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}$, одакле је $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n) \geqslant n \cdot \sqrt[n]{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2}$, односно $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \geqslant n \cdot \sqrt[n]{a_0^2}$, што је у супротности са условом задатка.

4. Нека су A' и B' подножја нормала $\triangle ABC$ из тачака A и B, редом, а α, β, γ одговарајући углови троугла. Како је $\triangle AB'H \sim \triangle ACA'$, следи $\dfrac{AH}{AB'} = \dfrac{AC}{AA'}$, а како је $AA' = b \sin\gamma$ (из $\triangle ACA'$), $AB' = c \cos\alpha$ (из

$\triangle ABB'$) и $c = a \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (синусна теорема), следи $AH = \dfrac{bc\cos\alpha}{b\sin\gamma} = a\operatorname{ctg}\alpha$. Аналогно је $BH = b\operatorname{ctg}\beta$ и $CH = b\operatorname{ctg}\gamma$, па треба доказати да је

$$\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}. \qquad (\dagger)$$



ОП 08 4А 4

Како је $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$ (видети (∗) у решењу 4. задатку са општинског такмичења за други разред А категорије), на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}$, односно $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \geqslant 3\sqrt{3}$, одакле непосредно следи (†). Једнакост важи ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М589, решење у Тангенти 47, стр. 19).

5. Нека је A скуп распореда шест томова енциклопедије, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу и 2. том се налази поред 3. тома, а B скуп распореда шест томова енциклопедије, тако да 1. том није ни први ни последњи у низу, 2. том се налази поред 3. тома и 5. том се налази поред 6. тома.

С обзиром да 2. и 3. том морају бити један поред другог они се могу замислити као један том, водећи рачуна да се тако преполовљава број распореда. Према томе, елементи скупа A се могу видети као распореди пет томова, с тим да 1. том може бити на једној од три некрајње позиције (остали немају ограничења) и унутар тома који је настао спајањем 2. и 3. тома треба одредити њихов распоред, па је $|A| = 2 \cdot 3 \cdot 4! = 144$.

Аналогно, приликом одређивања $|B|$ се 5. и 6. том могу видети као један, па је $|B| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 48$.

Коначно, укупан број распореда који задовољавају тражене услове је $|A| - |B| = 144 - 48 = 96$.

Четврти разред, Б категорија

1. Како је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -3 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = a - 3a - 1 - 3 - 1 - a^2 = -(a^2 + 2a + 5),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 - 0 - 1 = -2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - a = 1 - a,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + a + 0 + 1 - 0 - 0 = 1 + a,$$

за свако $a \in \mathbb{R}$ важи $\Delta \neq 0$, па систем има једно решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{2}{a^2 + 2a + 5}, \frac{a - 1}{a^2 + 2a + 5}, -\frac{a + 1}{a^2 + 2a + 5}\right)$$

(Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 4).

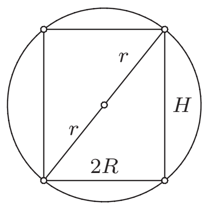
2. Како је површина паралелограма над векторима $\vec{x}$ и $\vec{y}$ једнака $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x} \times \vec{x} = 0$, $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ и како је (по условима задатка) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$, следи да је тражена површина једнака

$$\begin{aligned} |\vec{p} \times \vec{q}| &= \left|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b})\right| = \left|2a \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{a} - 8\vec{a} \times \vec{b} - 12\vec{b} \times \vec{b}\right| \\ &= \left|11\vec{b} \times \vec{a}\right| = 11 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 11 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 11. \end{aligned}$$

(Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 2).

3. Видети решење трећег задатка за трећи разред Б категорије.

4. Раван која садржи осу ваљка из услова задатка сече лопту по кружници полупречника r, а ваљак по правоугаонику уписаном у ову кружницу. Ако су R и H полупречник основе и висина овог ваљка, редом, тада су странице тог правоугаоника $2R$ и H, а дијагонала $2r$, па је (Питагорина теорема) $H^2 = 4(r^2 - R^2)$ $(0 < R < r)$.



ОП 08 4Б 4

Следи да је површина омотача ваљка $M(R) = 2RH\pi = 4\pi \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - R^2}$, па како је

$$M'(R) = 4\pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - R^2} + R \cdot \frac{-2R}{2\sqrt{r^2 - R^2}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{r^2 - R^2}} \cdot (r^2 - 2R^2),$$

следи да је $M'(R) > 0$ за $R \in \left(0, \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ и $M'(R) < 0$ за $R \in \left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}, r\right)$, тј. $M(R)$ је максимално за $R = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ и тада је $H = r\sqrt{2}$, а запремина тог ваљка $V = R^2 H\pi = \dfrac{r^3\pi \cdot \sqrt{2}}{2}$ (Тангента 50, стр. 33, Писмени задаци, задатак 3).

Напомена. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи $R\cdot\sqrt{r^2-R^2}=\sqrt{R^2\cdot(r^2-R^2)}\leqslant\dfrac{R^2+(r^2-R^2)}{2}$ и притом једнакост важи за $R^2=r^2-R^2$, тј. $R=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$, тј. у претходном се могло избећи коришћење извода.

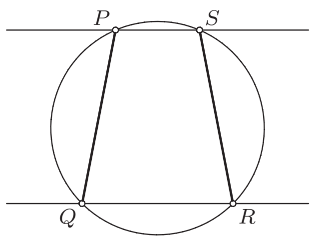
5. Видети решење првог задатка за четврти разред А категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

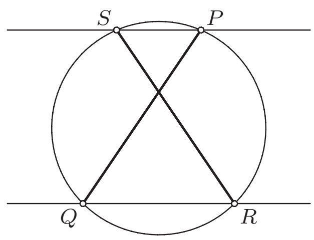
Први разред, А категорија

1. *Лема. Ако нека права сече кружницу у тачкама P и S, а њој паралелна права у тачкама Q и R, тада је $PQ = RS$.*

Доказ. PQ и RS су или краци или дијагонале једнакокраког трапеза (права која пролази кроз центар кружнице, а нормална је на уочену праву је оса симетрије).

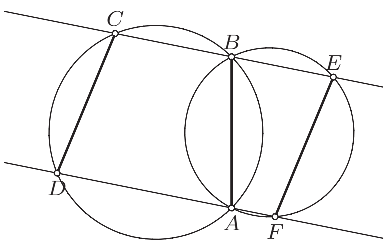


ОК 08 1А 1-1

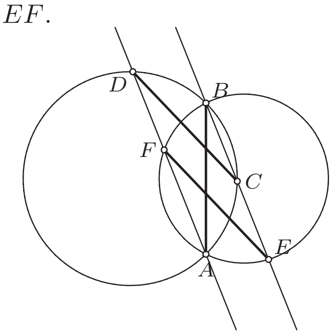


ОК 08 1А 1-2

Из претходне леме примењене на k_1 следи $CD = AB$, док се применом на k_2 добија $AB = EF$, одакле је $CD = EF$.



ОК 08 1А 1-3



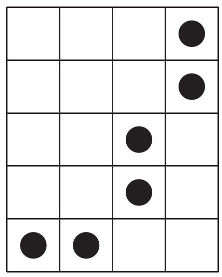
ОК 08 1А 1-4

2. **(а)** Двоцифраних бројева има $99-9=90$, па парова двоцифрених бројева има $\dbinom{90}{2}=4005$, а парова узастопних двоцифрених бројева

$90-1=89$. Дакле, два несуседна двоцифрена броја се могу изабрати на $4005-89=3916$ начина.

(б) Места на којима се налази цифра 5 се могу изабрати на $\binom{5}{2}$ начина, преостале 3 цифре из уоченог скупа на $\binom{6}{3}$ начина и на преостала три места се могу распоредити на 3! начина, па је тражени број је $\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot 3! = 1200$ (Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 1).

3. На табли 5×4, при условима задатка, се може поставити 6 топова (видети слику).



ОК 08 1А 3

Нека је на тој табли распоређен највећи могући број топова, тако да су испуњени услови задатка. По претходном примеру тај број није мањи од 6. Ако се у свакој колони налази највише један топ, број топова на табли је највише 4, па постоји колона која садржи бар два топа. Како се они међусобно нападају, у тој колони, као и у врстама у којима се налазе ова 2 топа, не сме бити других топова, тј. сви се налазе у преостале 3 врсте и преостале 3 колоне (на преосталих 9 поља).

Аналогно, ако се у свакој од преостале 3 колоне налази највише 1 топ, укупан број топова на табли је највише $2+3=5$, па се у некој од њих налази бар два топа. Како се они међусобно нападају, у тој колони, као и у врстама у којима се налазе ова 2 топа, не сме бити других топова, тј. сви се налазе у преостала 2 поља, па је највећи могући број топова $2+2+2=6$.
Дакле, тражени број је 6.

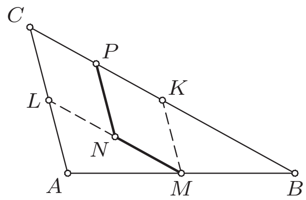
4. Алгебарским трансформацијама добија се да је полазна једнакост еквивалентна са

$$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z. \qquad (\blacklozenge)$$

Ако би x, y и z давали различите остатке при дељењу са 3, тада би њихови остаци при дељењу са три били 0, 1 и 2 (у неком редоследу), па је $x+y+z\equiv 0+1+2\equiv 0 \pmod 3$, а $(x-y)(y-z)(z-x)\not\equiv 0 \pmod 3$, тј. нека два од x, y и z морају дати исти остатак при дељењу са 3.
Нека је, без губљења општости, $x\equiv y \pmod 3$. Међутим, тада $3 \mid (x-y)(y-z)(z-x)$, па је, на основу ($\blacklozenge$), $0\equiv x+y+z\equiv 2x+z\equiv -x+z \pmod 3$, односно $x\equiv z \pmod 3$. Дакле, сваки умножак у $(x-y)(y-z)(z-x)$ је дељив са 3, тј. $3^3 \mid (x-y)(y-z)(z-x)$, па из $(*)$ следи да $27 \mid x+y+z$.

5. Нека је $\triangle ABC$ такав да је $AB = 3$, $BC = 4$ и $CA = 2$ (такав троугао постоји).

Нека су K, L, M средишта страница BC, CA, AB, редом, N средиште дужи LM, а P средиште дужи CK.



ОК 08 1А 5

Тада је $ML = 2$ и $ML \parallel BC$ (средња линија $\triangle ABC$), па је $MN = NL = 1$ и $MN \parallel NL \parallel BC$. По конструкцији је $CP = PK = 1$ (и, наравно, $CP \parallel PK \parallel BC$).

Аналогно (KM је средња линија $\triangle ABC$) је $KM = CL = NP = \dfrac{1}{2} \cdot AC$ и $KM \parallel PN \parallel CL \parallel AC$.

Следи да су четвороуглови $NMKP$ и $LNPC$ подударни паралелограми (ромбови странице 1), као и да је $\triangle AML \cong \triangle MBK$ ($AM = MB$, $AL = MK$, $ML = BK$), па полигони $MBPN$ и $AMNPC$ имају једнаке површине (оба се „састоје” од једног ромба странице 1 и једног од горе поменутих троуглова).

Дакле, полигонална линија састављена од дужи MN и NP задовољава услове задатка.

Први разред, Б категорија

1. Да не би дошло до дељења нулом, мора бити $|2x-3|-5 \neq 0$, а како је и $|x-3|+2>0$ за свако реално x, следи да је неједначина из задатка еквивалентна са $|2x-3|-5<0$.

За $x \geqslant \dfrac{3}{2}$ она је еквивалентна са $2x-3<5$, тј. $x<4$ (односно решења су $x \in \left[\dfrac{3}{2}, 4\right)$), а за $x < \dfrac{3}{2}$ са $3-2x<5$, тј. $x>-1$ (односно решења су $x \in \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$).

Дакле, решење је $x \in (-1, 4)$ (Тангента 44, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2(а)).

2. Нека су M, N, P, Q средишта дужи AF, CE, BF и DE, редом, и $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{c} + \overrightarrow{DE}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \overrightarrow{DF}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{c} + \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \quad \text{и, аналогно,} \\
\overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} + \overrightarrow{DF}\right) - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right),
\end{aligned}$$

тј. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, одакле следи да је $MNPQ$ паралелограм.

3. Сређивањем израза из задатка добија се

$$\left(a^2-6a+b+2\right)+\sqrt{2}\cdot(2a-6)=0.$$

Међутим, како је број $\sqrt{2}$ ирационалан, следи да је $p+\sqrt{2}\cdot q=0$ за $p,q\in\mathbb{Q}$ ако и само ако је $p=q=0$, па је $a^2-6a+b+2=2a-6=0$, одакле је $a=3$, $b=7$ (Тангента 45, стр. 38, Писмени задаци, задатак 5).

4. Видети решење првог задатка за први разред А категорије.

5. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

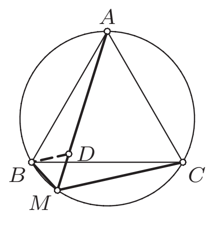
Други разред, А категорија

1. Једначина је дефинисана за свако $x\in\mathbb{R}$. Нека је $y=\sqrt[3]{a-x}$. Тада је $x=a-y^3$, па једначина постаје $y^3+y=a^3+a$, тј. $(y-a)(y^2+ya+a^2+1)=0$. Како је $y^2+ya+a^2+1>0$ (квадратна функција са водећим коефицијентом позитивним и дискриминантом $a^2-4\cdot1\cdot(a^2+1)=-3a^2-4<0$), једино решење последње једначине је $y=a$, одакле је $\sqrt[3]{a-x}=a$, тј. једино решење је $x=a-a^3$ (Тангента 50, стр. 10, М673, Наградни задаци).

Напомена. Да једначина има највише једно решење се могло видети и без растављања, на основу строгог раста функције $y\to y^3+y$.

2. По условима задатка, четвороугао $MCAB$ је тетиван, па, по Птоломејевој теореми, следи $MA\cdot BC=MB\cdot AC+MC\cdot AB$. Како је $\triangle ABC$ једнакостраничан, следи $BC=AC=AB$, одакле је $MA=MB+MC$.

Друго решење. Нека је $\mathcal{R}$ ротација са центром у B, која слика тачку C у тачку A (по условима задатка, ова ротација је или за 60° или за -60°, у зависности од оријентације $\triangle ABC$) и нека је $\mathcal{R}(M)=D$.
Троугао BMD је једнакостраничан ($BM=BD$ и $\sphericalangle DBM=60^\circ$), па је $MB=MD$. Такође, $MC=DA$ (јер је $\mathcal{R}(M)=D$ и $\mathcal{R}(C)=A$).



OK 08 2A 2

Притом је и $\sphericalangle BDA=\sphericalangle BMD=120^\circ$ (јер је $\mathcal{R}(\triangle BMC)=\triangle BDA$), а како је $\sphericalangle MDB=60^\circ$, следи да су тачке M, D и A колинеарне.

Дакле, $MA=MD+DA=MB+MC$.

3. Из датих ограничења за α и β следи да је $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+2\beta<\dfrac{3\pi}{2}$.

Нека је $t = \operatorname{tg}\beta$. Тада је $\sin 2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2\beta = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, а, по условима задатка, $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Следи да је $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \dfrac{(1-t^2)^2}{1+t^2}$. Како је α оштар, следи да је $\cos\alpha > 0$, а како је $t = \operatorname{tg}\beta \geqslant 1$ (јер је $\beta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$), следи да је $\cos\beta = \dfrac{t^2-1}{1+t^2}$, па је

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+2\beta) &= \sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha\sin 2\beta\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{t^2-1}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2} = 0,\end{aligned}$$

односно, $\alpha + 2\beta = k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Из горњег ограничења, следи да мора бити $\alpha + 2\beta = \pi$.

4. Систем $a - b = \alpha \wedge ab = \beta > 0$ по непознатима a и b има увек два решења

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) &= \left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}, \frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right) \quad \text{и}\\ (a_2, b_2) &= \left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}, \frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right).\end{aligned}$$

1° ако је $\alpha > 0$, следи $\max(a_1, b_1) = a_1$ и $\max(a_2, b_2) = a_2$, па је $x^2-\alpha x-\beta$ квадратни полином чији су корени a_1 и a_2 (односно $x^2-|\alpha|x-\beta$);

2° ако је $\alpha < 0$, следи $\max(a_1, b_1) = b_1$ и $\max(a_2, b_2) = b_2$, па је $x^2-\alpha x-\beta$ квадратни полином чији су корени су b_1 и b_2 (односно $x^2-|\alpha|x-\beta$).

Дакле, тражени полином је $x^2 - |\alpha|x - \beta$ (тј. $p = |\alpha|$ и $q = -\beta$).

5. Лифт се (без икаквих услова) може испразнити на $5^5 = 3\,125$ начина, јер свака од тих 5 особа може сићи на било ком спрату од 1. до 5.

Нека је N број начина на који они могу излазити из лифта тако да Аца и Цеца остану сами. Душан, Лука и Наташа могу напустити лифт до k-тог спрата тако да бар неко сиђе на k-том спрату на $k^3 - (k-1)^3$ начина (тада су Аца и Цеца остали сами у лифту). Свако од њих двоје може да изађе на неком од преосталих $5-k$ спратова. Како k може бити било који спрат од 1. до 4. (јер Аца и Цеца морају да остану сами) то је

$$N = \sum_{k=1}^{4}\left[\left(k^3-(k-1)^3\right)\cdot(5-k)^2\right] = 4^2 + 7\cdot 3^2 + 19\cdot 2^2 + 37\cdot 1^2 = 192.$$

Уместо Аце и Цеце ту може остати било који мушко-женски пар, а таквих парова има $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 6$, па је број начина да ових 5 особа напусти лифт, тако да ни у једном тренутку мушкарац и жена нису сами у лифту једнак

$$5^5 - \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot N = 3\,125 - 6 \cdot 192 = 1\,973.$$

Други разред, Б категорија

1. Мора бити $|1 - iz| \neq 0$. тј. $z \neq -i$. Ако је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, следи $x^2 + y^2 = |z|^2 = |1 - iz|^2 = |(1 + y) - ix|^2 = (1 + y)^2 + x^2$, одакле је $y = -\dfrac{1}{2}$. Дакле, скуп решења је $\left\{ z \mid Im\, z = -\dfrac{1}{2} \right\}$ (тј. сви бројеви облика $x - i \cdot \dfrac{1}{2}$ за $x \in \mathbb{R}$).

2. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

3. Мора бити $a \neq \dfrac{3}{2}$ (иначе једначина није квадратна). По условима задатка, једначина има реална решења, па јој је дискриминанта ненегативна, тј. $0 \leqslant 4(a + 1)^2 - 4(2a - 3)(a + 7) = -4(a + 11)(a - 2) = 4D_1$, тј. мора бити $a \in [-11, 2]$.

Дакле, треба размотрити ситуације:

1° $\dfrac{3}{2} < a \leqslant 2$; тада је мањи корен једначине $\alpha = \dfrac{a + 1 - \sqrt{D_1}}{2a - 3}$, па треба испитати да ли је $\alpha > 1$, што је еквивалентно са $\sqrt{D_1} < 4 - a$, па како су обе стране последње неједнакости (у овом случају) ненегативне, последње је еквивалентно са $(a + 2)(2a - 3) > 0$, што је тачно;

2° $-11 \leqslant a < \dfrac{3}{2}$; тада је мањи корен једначине $\alpha = \dfrac{a + 1 + \sqrt{D_1}}{2a - 3}$, па треба испитати да ли је $\alpha > 1$, што је еквивалентно са $\sqrt{D_1} < a - 4$, а последње није тачно, јер је $\sqrt{D_1} \geqslant 0$, а (у овом случају) $a - 4 < 0$, тј. у овом случају нема решења.

Дакле, оба корена једначине $(2a - 3)x^2 - 2(a + 1)x + a + 7 = 0$ су већа од 1 ако и само ако је $a \in \left(\dfrac{3}{2}, 2 \right]$ (Тангента 49, стр. 29, Писмени задаци, задатак 4).

4. Права која не садржи темена уоченог 2008-угла сече дуж одређену са нека два његова темена ако и само ако се она налазе у различитим полуравнима одређеним том правом. Дакле, ако се у једној од тих полуравни налази x темена, у другој се налази $2008-x$, односно број уочених дужи које сече та права је $x(2008-x)$.

Како је, на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, $x(2008-x) \leqslant \left(\dfrac{x+2008-x}{2}\right)^2 = 1004^2$, следи да је тај број не већи од 1004^2 и достиже се када се у свакој од полуравни одређених том правом налази 1004 темена уоченог 2008-угла.

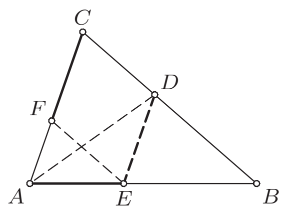
5. Видети решење другог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Како је $DE \parallel AC$, следи да је $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EDA$. Како је AD симетрала $\sphericalangle BAC$, следи $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAD$. Дакле, $\sphericalangle EDA = \sphericalangle EAD$, па је $\triangle ADE$ једнакокраки, одакле је $AE = DE$.

Како је $DE \parallel CF$ и $EF \parallel CD$, четвороугао $DEFC$ је паралелограм, па је и $DE = FC$.

Дакле, $AE = DE = FC$.



ОК 08 3А 1

2. За $k \in \{1,2,\ldots,29\}$ важи $\operatorname{tg}(k+1)^\circ = \dfrac{\operatorname{tg} k^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ}{1 - \operatorname{tg} k^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ}$, па ако је $\operatorname{tg} k^\circ \in \mathbb{Q}$ следи $\operatorname{tg}(k+1)^\circ \in \mathbb{Q}$.

Из претходног, ако је $\operatorname{tg} 1^\circ \in \mathbb{Q}$, следи да су рационални, редом, $\operatorname{tg} 2^\circ, \operatorname{tg} 3^\circ, \ldots, \operatorname{tg} 30^\circ$, што је контрадикција, јер је $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ирационалан број.

Из добијене контрадикције следи да је број $\operatorname{tg} 1^\circ$ ирационалан.

3. Из услова задатка следи:

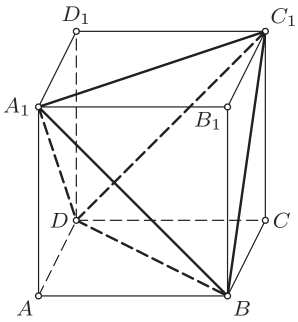
$$\begin{array}{rcl} a_1^2 & \leqslant & a_1^2 \\ 3a_2^2 & \leqslant & a_2^2 + 2a_1a_2 \\ 5a_3^2 & \leqslant & a_3^2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (2n-1)a_n^2 & \leqslant & a_n^2 + 2a_1a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n, \end{array}$$

одакле је, сабирањем,

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \ldots + (2n-1)a_n^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = 1.$$

4. Свака од страна коцке не може бити страна тетраедра, па на њу належу основама бар две стране тетраедара на које је разложена, тј. ивице ових тетраедара разлажу сваку страну коцке на бар 2 троугла.

Без умањења општости, нека је страна коцке дужине 1. Нека се коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ може исећи на 4 тетраедра. Тада на стране $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ належу сва 4 тетраедра, па сва 4 за основу имају једнакокрако-правоугли троугао крака 1 (квадрат се правом може разложити на 2 троугла једино ако се та права поклапа са неком од дијагонала квадрата), док им је висина која одговара тој основи не већа од 1.

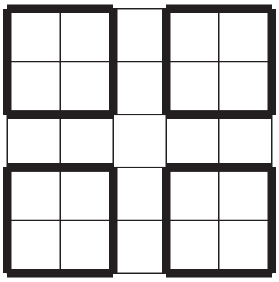


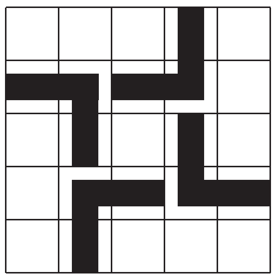
ОК 08 3А 4

Следи да је запремина сваког од ових тетраедара на већа од $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$, па је укупна запремина ова 4 тетраедра не већа од $4\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, што је немогуће, јер је запремина коцке 1.

Коцка се може исећи на 5 тетраедара (слика ОК 08 3А 4; то су тетраедри $ABDA_1$, $BCDC_1$, $A_1B_1C_1B$, $A_1C_1D_1D$ и BDA_1C_1) (Тангента 43, стр. 43, Наградни задаци, М543, решење у Тангенти 44, стр. 29)

5. Један L-тримино постављен на уочену таблу може имати заједничких поља са највише једним од четири угаона квадрата 2×2 (слика ОК 08 3А 5-1). Следи да је 3 L-тримина недовољно, јер су тада непопуњена сва четири поља у једном од тих угаоних квадрата, па се може додати (у тај квадрат) још један L-тримино.


ОК 08 3А 5-1


ОК 08 3А 5-2

Четири L-тримина су довољна. Заиста, на слици ОК 08 3А 5-2 су на таблу 5×5 постављена 4 L-тримина, а не може се поставити више ниједан L-тримино.

Трећи разред, Б категорија

1. Да би једначина била дефинисана, мора бити $x\neq 3$, $\frac{x+1}{x-3} > 0$ и $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-3} > 1$, тј. (логаритамска функција са основом мањом од 1 је опадајућа)

$$0 < \frac{x+1}{x-3} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+1}{x-3} > 0 \wedge \frac{4}{x-3} < 0\right),$$

одакле следи да мора бити $x \in (-\infty, -1)$.

Како је логаритамска функција растућа ако јој је основа већа од 1, а опадајућа ако јој је основа мања од 1, за $x \in (-\infty, -1)$ следи

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x+7}{4(x-3)} \leqslant 0,$$

тј. (за $x \in (-\infty, -1)$ је $x - 3 < 0$) $x \geqslant -\dfrac{7}{3}$, па је решење ове једначине $x \in \left[-\dfrac{7}{3}, -1\right)$ (Тангента 47, стр. 36, Писмени задаци, задатак 5).

2. Како је $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ (специјално, $\vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$ и $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$), по условима задатка следи да је

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{m} \cdot \vec{n} = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 5\vec{b}) = 2\,|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - 5\big|\vec{b}\big|^2 \\ &= 2 \cdot 2^2 + 9 \cdot |\vec{a}| \cdot \big|\vec{b}\big| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) - 5 \cdot 3^2 = -37 + 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}), \end{aligned}$$

одакле је $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{37}{54}$, тј. угао између $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је $\arccos\dfrac{37}{54}$ (Тангента 50, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2).

3. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.

4. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ и нека је $a \leqslant b \leqslant c$ (без умањења општости). Ако је $a = b$ или $b = c$, тада је $f(b) = (b-a)(b-c) = 0$, па се може претпоставити да је $a < b < c$. Како је $f(b) = (b-c)(b-a) < 0$ и $f(a) = (a-b)(a-c) > 0$, постоји нула f која је између a и b (постоји и између b и c, јер је и $f(c) > 0$) (полином је непрекидна функција).

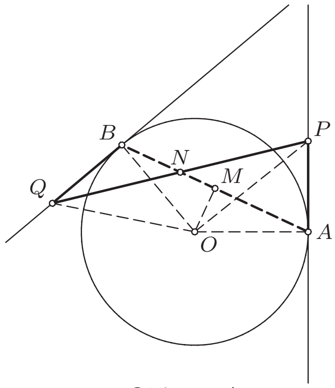
Друго решење. Како је $f(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$, f је квадратна функција чија је дискриминанта $\big(2(a+b+c)\big)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (ab+bc+ca) = 4 \cdot \big(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\big) = 2 \cdot \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geqslant 0$, па има реално решење.

2. Нека су a, b и c корени једначине из задатка, који су странице правоуглог троугла и нека је (без умањења општости) $c^2 = a^2 + b^2$. Из Виетових правила је $a + b + c = 12$ и $ab + bc + ca = m$, па је $2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 144 - 2m$, тј. $m = 72 - c^2$.

Како је и $c^3 - 12c^2 + mc - 60 = 0$ (c је корен ове једначине), следи $0 = c^3 - 12c^2 + (72 - c^2)c - 60 = -12c^2 + 72c - 60$, тј. $0 = c^2 - 6c + 5 = (c-5)(c-1)$. Ако је $c = 1$, следи $a + b = 11$ и $a^2 + b^2 = 1$, па је, на основу неједнакости између квадратне и аритметичке средине (као странице троугла, a и b су позитивни бројеви), $1 = a^2 + b^2 \geqslant 2 \cdot \sqrt{\dfrac{a+b}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{11}{2}} > 1$.

Из добијене контрадикције следи да је $c = 5$ и тада је $m = 72 - 5^2 = 47$ (провером се добија да су за $m = 47$ корени дате једначине 3, 4 и 5) (Тангента 44, стр. 45, Писмени задаци, задатак 5).

3. Нека су M и N, редом, средишта дужи AB и PQ. Из подударности троуглова OAP и OBQ ($AP = QB$, $OA = OB$, $\sphericalangle OAP = 90^\circ = \sphericalangle OBQ$) следи $\triangle OPQ \sim \triangle OAB$ ($OP = OQ$, $OA = OB$, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOP + \sphericalangle POB = \sphericalangle BOQ + \sphericalangle POB = \sphericalangle POQ$), одакле је $\triangle OMN \sim \triangle OAP$ ($OM : ON = OA : OP$, $\sphericalangle MON = \sphericalangle PON - \sphericalangle POM = \sphericalangle AOM - \sphericalangle POM = \sphericalangle AOP$). Дакле, $\sphericalangle OMN = 90^\circ = \sphericalangle OMB$, па A, B и N леже на истој правој.



ОК 08 4А 3

4. Нека је f дефинисана на скупу простих бројева са:

$$f(2) = 3^2, \qquad f(3) = 2^2, \qquad f(p) = p^2, \quad \text{за} \quad p > 3,$$

а за произвољан (сложен) $n \in \mathbb{N}$ са

$$f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot f(p_s)^{\alpha_s},$$

где је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ (канонска факторизација броја n).

Ова функција задовољава услове задатка.

5. Нека се низу који задовољава услове задатка на крај додају још две нуле (тако се добија низ дужине 12). Услови задатка задовољени ако и само ако се (у новодобијеном низу) након сваке јединице налазе две нуле. Другим речима, свакој јединици се може придружити блок дужине три (који садржи јединицу и две наредне нуле), такви блокови се не преклапају, и изван тих блокова су све нуле.

Ако јединица у низу има k, таквих низова има $\dbinom{12-2k}{k}$ (комбинације k блокова и $12 - 3k$ нула), па је укупан број оваквих низова

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{12-2k}{k} = \binom{12}{0} + \binom{10}{1} + \binom{8}{2} + \binom{6}{3} + \binom{4}{4} = 60.$$

Четврти разред, Б категорија

1. Полином x^2+x+1 има две различите нуле, па је довољно показати да је $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=0$, где је α нула полинома x^2+x+1, тј. важи $\alpha^2+\alpha+1=0$ и $0=(\alpha^2+\alpha+1)\cdot(\alpha-1)=\alpha^3-1$ (односно $\alpha^3=1$).

Из ових веза и како је p непаран следи да је $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=(-\alpha^2)^p-\alpha^p-1=-(\alpha^{2p}+\alpha^p+1)$. Како је сваки прост број већи од 4 или облика $6k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}$ или облика $6k+5$ за неко $k\in\mathbb{N}_0$, следи:

1° ако је $p=6k+1$ за неко $k\in\mathbb{N}$, тада је $\alpha^{2p}+\alpha^p+1=\alpha^{12k+2}+\alpha^{6k+1}+1=\alpha^2+\alpha+1=0$, тј. $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=0$;

2° ако је $p=6k+5$ за неко $k\in\mathbb{N}_0$, тада је $\alpha^{2p}+\alpha^p+1=\alpha^{12k+10}+\alpha^{6k+5}+1=\alpha+\alpha^2+1=0$, тј. $(\alpha+1)^p-\alpha^p-1=0$.

2. Како је $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$ (специјално, $\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2$ и $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$), и како је, по условима задатка, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, односно како је угао између било која два различита вектора из овог скупа $\dfrac{\pi}{3}$, следи

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2 &= \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\\ &+ 2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{b},\vec{c})+2\cdot|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{c},\vec{a})\\ &= 3+2\cdot\left(\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})+\cos\sphericalangle(\vec{b},\vec{c})+\cos\sphericalangle(\vec{c},\vec{a})\right)=6.\end{aligned}$$

Дакле, $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{6}$.

3. Ако се и куглице и кутије разликују, свака куглица се, независно од осталих, може распоредити у произвољну од 7 кутија, па је одговор на питање дела (а) $7^4=2401$.

Ако се не разликују ни кутије ни куглице, тражени број је једнак броју неуређених разбијања броја 4 на 7 делова (тј. број решења једначине $x_1+x_2+\ldots+x_7=4$ при условима $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_7\geqslant 0$). За ове бројеве се ова разбијања лако могу исписати (у питању су „мали” бројеви):

$$\begin{aligned}7 &= 4+0+0+0+0+0+0=3+1+0+0+0+0+0\\ &= 2+2+0+0+0+0+0=2+1+1+0+0+0+0\\ &= 1+1+1+1+0+0+0,\end{aligned}$$

тј. одговор да питање дела (б) је 5 (Тангента 48, стр. 14, Наградни задаци, М626(а)(г), решење у Тангенти 49, стр. 16).

4. Видети решење првог задатка за четврти разред А категорије.

5. Видети решење другог задатка за четврти разред А категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

Први разред, А категорија

1. Како је c дељиво квадратом природног броја, c може бити један од бројева:

$$4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32, 36, 40, 44, 45, 48, 49, 50,$$

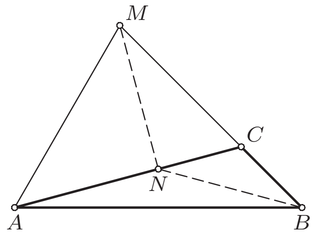
тј. c је или облика p^k (где је p прост број и $k \geqslant 2$) или облика $p^k \cdot q^l$ (где су p, q прости бројеви, $k, l \in \mathbb{N}$ и $\max\{k, l\} \geqslant 2$). Заиста, ако би c имао бар 3 проста фактора и био дељив са квадратом, тада би (за неке просте p, q, r, неке $k, l, m \in \mathbb{N}$, $\max\{k, l, m\} \geqslant 2$ и $N \in \mathbb{N}$) било $c = p^k \cdot q^l \cdot r^m \cdot N \geqslant 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 = 60$.

1° Ако је c облика p^k, где је p прост број (то су бројеви 4,8,9,16,25, 27,32,49) по условима задатка мора бити $a = 1$ и $b = p$ (што је само 1 могућност за избор), тј. свака од 8 могућности за c једнозначно одређује a и b.

2° Ако је c облика $p^k \cdot q^l$, где су p и q прости бројеви (то су остали бројеви), тада се a и b могу изабрати на $\binom{4}{2} = 6$ начина (бира се 2 броја од бројева 1, p, q и pq – a је мањи од та 2 броја), тј. свака од 11 могућности за c даје 6 различитих могућности за a и b.

Дакле, тражених избора има $8 \cdot 1 + 11 \cdot 6 = 74$.

2. Нека је N подножје нормале из M на AC. Тада је $\sphericalangle MNC = 90°$, $\sphericalangle NCM = 15° + 45° = 60°$ и $\sphericalangle CMN = 30°$, па је $CM = 2 \cdot CN$, тј. $\triangle BCN$ и $\triangle BMN$ су једнакокраки. Како је $\sphericalangle ABN = \sphericalangle BAN = 15°$, и $\triangle ABN$ је једнакокраки, па је N центар описаног круга троугла ABM ($NA = NB = NM$).



ДР 08 1А 2

Дакле, $\sphericalangle BAM = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BNM = \frac{1}{2} \cdot (30° + 90°) = 60°$, $\sphericalangle BMA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ANB = 75°$ и $\sphericalangle ABM = 180° - \sphericalangle BAM - \sphericalangle BMA = 45°$.

3. Нека је $A(x) = x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$. Алгебарским трансформацијама се добија

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{2008} - x^{2007} - 3x + 3 + 1 = (x-1)\left(x^{2007} - 3\right) + 1 \\ &= (x-1)\left[\left(x^{2007} - 1\right) - 2\right] + 1 \\ &= (x-1)\left[(x-1)\left(x^{2006} + x^{2005} + \ldots + x + 1\right) - 2\right] + 1. \qquad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Нека је $B(x) = x^{2006} + x^{2005} + \ldots + x + 1$. Полином $B(x)$ при дељењу са $x-1$, на основу Безуове теореме, даје остатак $B(1) = 2007$. Следи $B(x) = (x-1)Q(x) + 2007$, за неки $Q \in \mathbb{R}[x]$. Уврштавањем последње једнакости у (♠), добија се

$$A(x) = (x-1)^3 Q(x) + 2007(x-1)^2 - 2(x-1) + 1.$$

Дакле, тражени остатак је $2007(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 = 2007\,x^2 - 4016\,x + 2010$.

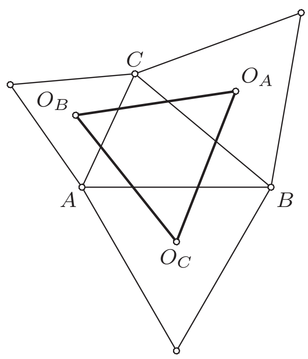
4. *Лема. Нека су тачке* A_1, B_1, C_1 *такве да су* $\triangle CBA_1, \triangle ACB_1, \triangle ABC_1$ *једнакостранични и немају заједничких унутрашњих тачака са* $\triangle ABC$ *и* O_A, O_B, O_C*, редом, њихови центри. Тада је* $\triangle O_AO_BO_C$ *једнакостраничан.*

Доказ. Нека $\mathcal{R}_{X,\alpha}$ означава ротацију са центром у тачки X за угао α, а $\mathcal{S}_x$ симетрију у односу на праву x. Како је $O_AB = O_AC$, $O_BC = O_BA$, $O_CA = O_CB$ и $\sphericalangle BO_AC = \sphericalangle CO_BA = \sphericalangle AO_CB = 120^\circ$, следи да је $\mathcal{R}_{O_A,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_B,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C,120^\circ}$ директна изометријска трансформација са фиксном тачком B ($\mathcal{R}_{O_A,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_B,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C,120^\circ}(B) = \mathcal{R}_{O_A,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_B,120^\circ}(A) = \mathcal{R}_{O_A,120^\circ}(C) = B$), па је то ротација са центром у B за угао $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$, тј. идентитет. Одавде следи да је $\mathcal{R}_{O_B,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C,120^\circ} = \mathcal{R}^{-1}_{O_A,120^\circ} = \mathcal{R}_{O_A,240^\circ}$.

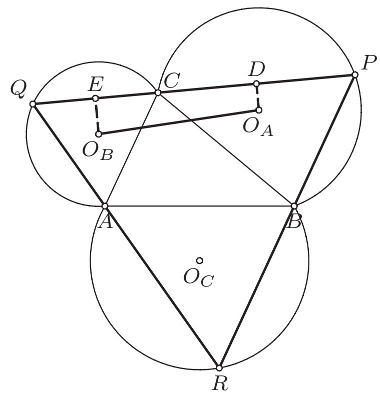
Нека је x права одређена тачкама O_B и O_C, $y_1 = \mathcal{R}_{O_C,-60^\circ}$ и $y_2 = \mathcal{R}_{O_B,60^\circ}$. Тада је $\mathcal{R}_{O_B,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_C,120^\circ} = \mathcal{S}_{y_2} \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_{y_1} = \mathcal{S}_{y_2} \circ \mathcal{S}_{y_1} = \mathcal{R}_{X,240^\circ}$, где је X пресечна тачка правих y_1 и y_2, тј. тачка таква да је $\triangle XO_BO_C$ позитивно оријентисан једнакостраничан троугао (оријентисан $\sphericalangle(y_1, y_2)$ је 120°, па је угао ове ротације 240°).

Следи $\mathcal{R}_{O_A,240^\circ} = \mathcal{R}_{O_A,240^\circ}$, одакле је $O_A \equiv X$, па је $\triangle O_AO_BO_C$ једнакостраничан.

Напомена. Троугао $O_AO_BO_C$ је познат и као *Наполеонов троугао.*



ДР 08 1А 4-1



ДР 08 1А 4-2

Анализа. Нека су O_A, O_B, O_C дефинисане као у леми. Како је $\sphericalangle BPC = 60^\circ$, следи да тачка P припада геометријском месту тачака у равни из којих се дуж BC види под углом 60°, тј. кружном луку $\widehat{BC}$ са центром

O_A, који је ван $\triangle ABC$. Аналогно, тачке Q и R припадају кружним луковима $\widehat{CA}$ и $\widehat{AB}$, редом, са центрима у O_B и O_C, редом.

Нека је тачка P на луку $\widehat{BC}$. Нека су тачке Q и R пресечне тачке права PC и PB и лукова $\widehat{CA}$ и $\widehat{AB}$, редом. Како је $\sphericalangle RPQ = \sphericalangle PRA = \sphericalangle PQA = 60^\circ$, следи да је $Q - A - R$ и да је $\triangle PQR$ једнакостраничан, па треба одредити за коју тачку $P \in \widehat{BC}$ се добија троугао највеће странице.

Нека су D и E средишта дужи CP и CQ, редом. Тада је $CP = 2 \cdot CD$ и $CQ = 2 \cdot CE$. Одавде је $PQ = 2 \cdot (CD + DE) = 2 \cdot DE$. Како је трапез O_BO_ADE правоугли (права која спаја центре круга и тетиве је нормална на тетиву) са $\sphericalangle O_ADE = \sphericalangle DEO_B = 90^\circ$, следи $O_AO_B \geqslant DE$. Дакле, PQ је највећа када је $O_AO_B = DE$, тј. када је $PQ \parallel O_AO_B$. Из леме следи да је тада и $QR \parallel O_BO_C$ и $RP \parallel O_CO_A$.

Конструкција. Нека су O_A, O_B, O_C конструисане као у леми (конструишу се једнакостранични троуглови над страницама троугла (ван троугла), а затим њихови центри) и нека су праве o_A, o_B, o_C праве које садрже A, B, C и које су паралелне са O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B, редом. Тада је $P = o_B \cap o_C$, $Q = o_C \cap o_A$, $R = o_A \cap o_B$.

Доказ. Коректност конструкције следи из анализе.

Дискусија. Сваки корак конструкције је добро дефинисан и јединствен, па за сваки $\triangle ABC$ постоји јединствено решење.

5. Прости бројеви већи од 5 се завршавају неком од цифара 1,3,7,9, па се њихови четврти степени завршавају цифром 1. Следи да је цифра јединица броја $2p^4 + 3$, за $p \neq 2$ и $p \neq 5$, једнака 5, па је он дељив са 5 (а како је и већи од 5, следи да је овај број сложен). Провером, и бројеви $2 \cdot 2^4 + 3 = 35 = 5 \cdot 7$ и $2 \cdot 5^4 + 3 = 1\,253 = 7 \cdot 179$ су сложени.

Дакле за $n = 4$ и произвољан прост број p, број $2p^n + 3$ је сложен.

Напомена. Краће, за $(p, 5) = 1$ (тј. за $p \neq 5$) је $p^4 \equiv 1 \pmod 5$, одакле је $2p^4 + 3 \equiv 0 \pmod 5$ (што уз $2p^4 + 3 > 5$) повлачи да је број $2p^4 + 3$ сложен.

Први разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}(a+b)^6 - a^6 &= \left[(a+b)^3 + a^3\right] \cdot \left[(a+b)^3 - a^3\right] \\ &= \left[(a+b) + a\right] \cdot \left[(a+b)^2 - a(a+b) + a^2\right] \cdot \left[(a+b)^3 - a^3\right] \\ &= \left(a^2 + ab + b^2\right) \cdot (2a+b) \cdot \left[(a+b)^3 - a^3\right],\end{aligned}$$

следи тврђење задатка.

2. Како је $3^7 = 2\,187 = 45 \cdot 49 - 18 \equiv -18 \pmod{49}$ и $4^7 = 16\,384 = 334 \cdot 49 + 18 \equiv 18 \pmod{49}$, следи

$$3^{105} + 4^{105} = \left(3^7\right)^{15} + \left(4^7\right)^{15} \equiv (-18)^{15} + (18)^{15} = -18^{15} + 18^{15} = 0 \pmod{49}.$$

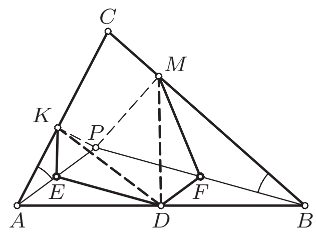
Како је $3^5 = 243 = 181+62 \equiv 62 \pmod{181}$ и $4^5 = 1\,024 = 6\cdot 181 - 62 \equiv -62 \pmod{181}$, следи

$$3^{105}+4^{105} = \left(3^5\right)^{21} + \left(4^5\right)^{21} \equiv (62)^{21} + (-62)^{21} = 62^{21} - 62^{21} = 0 \pmod{181}.$$

Дакле, број $3^{105}+4^{105}$ је дељив и са 49 и са 181, па како је $(49, 181) = 1$, следи да је дељив и са $49 \cdot 181$ (Тангента 46, стр. 40, Писмени задаци, задатак 5).

3. Нека су E и F средишта дужи AP и BP, редом. Тада је E средиште хипотенузе правоуглог $\triangle APK$, па је $AE = KE = PE$ и $\sphericalangle PEK = 2\cdot\sphericalangle PAC$. DF је средња линија $\triangle ABP$, па је $DF = \dfrac{1}{2}\cdot AP = PE$. Аналогно, F средиште хипотенузе правоуглог $\triangle PBM$, па је $MF = PF = BF$ и $\sphericalangle PFM = 2\cdot\sphericalangle PBC$. DE је средња линија $\triangle ABP$, па је $DE = \dfrac{1}{2}\cdot BP = PF$.

Следи да је четвороугао $DEPF$ паралелограм, и $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DFP$, па је $\triangle KED \cong \triangle DFM$ (СУС, $KE = PE = DF$, $DE = PF = MF$, $\sphericalangle DEK = \sphericalangle PEK + \sphericalangle DEP = 2\cdot\sphericalangle PAC + \sphericalangle DEP = 2\cdot\sphericalangle PBC + \sphericalangle DFP = \sphericalangle PFM + \sphericalangle DFP = \sphericalangle DFM$), одакле је $DK = DM$.



ДР 08 1Б 3

4. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

5. Нека су војници означени бројевима од 1 до 12 по висини (тако да је 1 најнижи, а 12 највиши). На основу услова 2° и 3° следи да су у последњој врсти војници 9,10,11,12 (и то тим редом слева на десно). Како је војник 8 највиши од престалих војника он мора да буде у другој врсти „скроз десно" (због услова услова 1° и 2°). Како је војник 1 најнижи он ће морати да буде у првој врсти „скроз лево" (због услова услова 1° и 2°). Дакле, распоред војника је облика
$$\begin{array}{cccc} 1 & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}.$$
Нека капетан поставља остале војнике по висини, почев од најнижег. Нека је сваком распореду војника додељен формални збир облика $1\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1}_{6}$, где избор знака $+$ испред i-те јединице одговара постављању i-тог војника на прво слободно место у првом реду, а $-$ постављању i-тог војника на прво слободно место у другом реду (на овакав начин биће испуњен услов 2°). Како је и у првом и у другом реду слободно 3 места, збиру мора одговарати избор 3 знака $+$ и 3 знака $-$ (тј. не више од $\dbinom{6}{3}$ избора), уз ограничење да се не може поставити војник на место у другој колони ако је место „изнад" празно (да би био испуњен услов 1°), односно збир бројева до i-тог места увек мора бити ненегативан.

Ако је збир бројева у неком тренутку негативан у једном моменту мора бити једнак -1, а на основу парности следи да се то може десити на или после треће или после пете јединице. Ако је збир после треће јединице -1, тада је на прва два места изабран знак $-$, а на преостала 4 се произвољно распоређују 3 знака $+$ и један $-$, тј. оваквих избора има $\binom{4}{3}$. Аналогно, ако је збир после пете јединице -1, тада је на последња два места изабран знак $+$, а на преостала 4 се произвољно распоређују 3 знака $-$ и један $+$, тј. оваквих избора има $\binom{4}{3}$. Међутим, низови код којих су и збир после треће и збир после пете јединице једнаки -1 су урачунати у оба претходна бројања. Тада је на прва два места изабран $-$, на последња два $+$, а на преостала два се произвољно распоређују један $+$ и један $-$, тј. оваквих низова има $\binom{2}{1}$.

Коначно, из претходног следи да је тражени број размештања

$$\binom{6}{3} - \left[\binom{4}{3} + \binom{4}{3} - \binom{2}{1}\right] = 14.$$

Напомена. Број низова из решења задатка је *Каталанов број* $C_4 = 14$ (Каталанов број је $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ за $n \in \mathbb{N}$). Због „малог” броја решења, до решења се може доћи и „грубом силом”. Сви распореди су:

1	2	3	4	1	2	3	5	1	2	3	6	1	2	3	7
5	6	7	8	4	6	7	8	4	5	7	8	4	5	6	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
1	2	4	5	1	2	4	6	1	2	4	7	1	2	5	6
3	6	7	8	3	5	7	8	3	5	6	8	3	4	7	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
1	2	5	7	1	3	4	5	1	3	4	6	1	3	4	7
3	4	6	8	2	6	7	8	2	5	7	8	2	5	6	8
9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
				1	3	5	6	1	3	5	7				
				2	4	7	8	2	4	6	8				
				9	10	11	12	9	10	11	12				

Други разред, А категорија

1. Како је $(n, n+1) = 1$ и $(n+1, n+2) = 1$, следи $(n+1, n(n+2)) = 1$, па је или $n+1 = x^2$ и $n(n+2) = y^2$ или $n+1 = -x^2$ и $n(n+2) = -y^2$ за неке $x, y \in \mathbb{N}_0$.

1° Ако је $n(n+2) = y^2$, следи $(n+1)^2 - 1 = n(n+2) = y^2$, па је $y = 0$ и $|n+1| = 1$, тј. $n \in \{-2, 0\}$.

2° Ако је $n(n+2) = -y^2$, следи $(n+1)^2 - 1 = n(n+2) = -y^2$, тј. $(n+1)^2 + y^2 = 1$, па је или $y = 1$ и $|n+1| = 0$ или $y = 0$ и $|n+1| = 1$, тј. $n \in \{-2, -1, 0\}$.

У сваком случају се добија $m = 0$, па су решења

$$(m, n) \in \{(0,0), (0,-1), (0,-2)\}.$$

2. Неједнакост из задатка је еквивалентна са

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - n)(a_i - (n-1)) \leqslant 0.$$

Како је за $a_i \notin \{n-1, n\}$ сваки сабирак претходне суме позитиван, неједнакост важи ако и само ако је сваки од сабирака једнак или $n-1$ или n. Следи да су сви a_i позитивни и важи

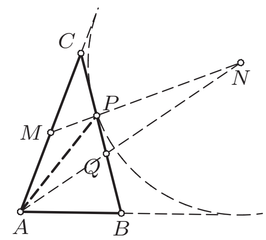
$$n^2+1 = n(n-1)+n+1 \leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n+n+1 \leqslant n^2+n+1 < (n+1)^2,$$

тј. број $a_1+a_2+\ldots+a_n+n+1$ се налази између два узастопна квадрата, па не може бити потпун квадрат.

3. Нека је Q тачка пресека AN и BC. Како је AQ симетрала $\sphericalangle BAC$, $\triangle AQC$ је једнакокраки. Из Менелајеве теореме за $\triangle AQC$ (пошто је $M - P - N$) следи

$$\frac{AN}{NQ} \cdot \frac{QP}{PC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1,$$

па је (због $CM = MA$) $\dfrac{QP}{CP} = \dfrac{NQ}{AN}$.



ДР 08 2А 3

Како је CN симетрала спољашњег угла код темена C, следи (из $\triangle AQC$) $\dfrac{CA}{CQ} = \dfrac{AN}{NQ}$, па је $\dfrac{QP}{CP} = \dfrac{AQ}{CA}$, тј. AP је симетрала $\sphericalangle QAC$.

Дакле, $\sphericalangle QAP = \dfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle BCA$, па је $\sphericalangle BAP = \dfrac{3}{2} \cdot \sphericalangle BCA = \sphericalangle BPA$, тј. $AB = BP$ ($\triangle ABP$ је једнакокрак).

4. Нека је број тачака које припадају страницама петоугла једнак a, b, c, d, e, редом, и нека је t од њих неко теме петоугла. Тада је укупан број уочених тачака $n = a+b+c+d+e-t$, а укупан број троуглова одређених са ових n тачака

$$2008 = \binom{n}{3} - \binom{a}{3} - \binom{b}{3} - \binom{c}{3} - \binom{d}{3} - \binom{e}{3}, \qquad (\maltese)$$

(где је $\dbinom{k}{3} = 0$ за $k < 3$).

Из ($\maltese$) и $\dbinom{n}{3} < \dfrac{(n-1)^3}{6}$ следи $2008 \leqslant \dbinom{n}{3} < \dfrac{(n-1)^3}{6}$, па је $n \geqslant 24$.

Ако је $n=24$, на основу (✠) важи $\binom{a}{3}+\binom{b}{3}+\binom{c}{3}+\binom{d}{3}+\binom{e}{3}=\binom{24}{3}-2008=16$. Како је $a+b+c+d+e=24+t\geqslant 24$, то је или бар један од бројева a,b,c,d,e већи од 5 или бар два (четири) једнака 5, па бар један сабирак леве стране претходне једнакости није мањи од $\min\left\{\binom{6}{3},2\cdot\binom{6}{3}\right\}=20>16$. Из добијене контрадикције следи да је број уочених тачака је већи од 24.

Ако је $n=25$, (✠) важи $\binom{a}{3}+\binom{b}{3}+\binom{c}{3}+\binom{d}{3}+\binom{e}{3}=\binom{25}{3}-2008=292$. Треба приказати 292 као збир бројева облика $\binom{k}{3}$, $k\in\mathbb{N}_0$ (тј. бројева 0,1,4,10,20,35,56,84,120,165,220,286,364,...). Како је

$$292=286+4+1+1+0=\binom{13}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{3}+\binom{2}{3}$$

и $25=13+4+3+3+2$, ако се на страницама петоугла налази, редом, 13,4,3,3 и 2 тачке, при чему ниједна није теме петоугла, њима је одређено тачно 2 008 троуглова.

Дакле, најмањи могући број уочених тачака је $n=25$.

5. Нека су болесници $b_0,b_1,\ldots,b_9$, а флаше $f_1,f_2,\ldots,f_{1\,000}$. Нека је $i=c_{9,i}\cdot 2^9+c_{8,i}\cdot 2^8+\ldots+c_{0,i}\cdot 2^0$ бинарна репрезентација природног броја i не већег од 1 000 (како је $1\,000<2^{10}-1$ бинарна репрезентација оваквих бројева нема више од 10 цифара). За свако $k=0,\ldots,9$ лекар садржај флаше f_i треба да да болеснику b_k ако и само ако је $c_{k,i}=1$. Ујутру, ако су се симптоми оздрављења појавили код болесника $\{b_j \mid j\in\mathcal{J}\}$ (где је $\mathcal{J}\subseteq\{1,2,\ldots,10\}$), он ће знати да је флаша у којој се налази лек f_i, где је $i=\sum\limits_{j\in\mathcal{J}}2^j$.

Други разред, Б категорија

1. Како је $|x^2+x-2|=\begin{cases}\ \ x^2+x-2, & \text{за } x\in(-\infty,-2\,]\cup[\,1,+\infty)\\ -x^2-x+2, & \text{за } x\in(-2,1)\end{cases}$, следи:

1° ако је $x\in(-\infty,-2\,]\cup[\,1,+\infty)$ једначина постаје $x^2-3x-4=0$. Њена решења су -1 и 4. Међутим, -1 се у овој ситуацији не прихвата као решење полазне једначине, јер $-1\notin(-\infty,-2\,]\cup[\,1,+\infty)$;

2° ако је $x\in(-2,1)$ једначина постаје $-x^2-5x=0$. Њена решења -5 и 0. Међутим, -5 се у овој ситуацији не прихвата као решење полазне једначине, јер $-5\notin(-2,1)$.

Дакле, решења једначине из задатка су $x=0$ и $x=4$.

2. Како је $\triangle ABC$ оштроугли, важи $B-E-A$, $A-F-B$ и $B-D-C$, тј. тачке F, D и B се налазе у истој полупавни одређеној правом AC.

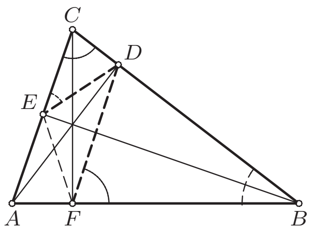
Четвороугао $AFDC$ је тетиван ($\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$), па је $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle AFD = \sphericalangle DFB$.

Аналогно, четвороугао $ABDE$ је тетиван ($\sphericalangle BEA = \sphericalangle BDA = 90^\circ$), па је $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle DEA = \sphericalangle CED$.

Из претходног следи да важи $\triangle BDF \sim \triangle DCE$, одакле је

$$\frac{BD}{DE} = \frac{DF}{CD},$$

тј. $BD \cdot CD = DE \cdot DF$.



ДР 08 2Б 2

3. Да не би дошло до дељења са 0, мора бити $2^x \neq 1$ ($2^x > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$). Да би поткорене величине биле ненегативне, мора бити $2^x - 1 \geqslant 0$. Дакле, да би једначина имала смисла, мора бити $2^x > 1$, тј. $x \in (0, \infty)$.

Нека је $t = \sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}}$ (мора бити $t > 0$). Неједначина постаје $4t + \sqrt{14} \leqslant \dfrac{7}{t} \Leftrightarrow 4t^2 + \sqrt{14}\,t - 7 \leqslant 0$ (јер је $t > 0$). Корени квадратног израза из последње неједначине су $t_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{14} \pm \sqrt{14 + 4 \cdot 4 \cdot 7}}{8} = \dfrac{-\sqrt{14} \pm \sqrt{14 \cdot 9}}{8} = \dfrac{-\sqrt{14} \pm 3 \cdot \sqrt{14}}{8}$. Како је $\dfrac{-\sqrt{14} - 3 \cdot \sqrt{14}}{8} < 0 < \dfrac{2 \cdot \sqrt{14}}{8} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$, следи да је $0 < t \leqslant \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Како је $t \leqslant \dfrac{\sqrt{14}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2^x - 1}{2^x}} \leqslant \dfrac{\sqrt{14}}{4} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{2^x - 1}{2^x} \leqslant \dfrac{7}{8} \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leqslant \dfrac{1}{2^x} \Leftrightarrow 2^x \leqslant 2^3$, следи да је решење неједначине из задатка $x \in (0, 3]$ (Тангента 43, стр. 41, Писмени задаци, задатак 2).

4. Нека је $x = \log_2 3$. Како је логаритамска функција растућа када је њена основа већа од 1, из $3^7 > 2^{11}$ следи $\log_2 3^7 > \log_2 2^{11}$, односно $x = \log_2 3 > \dfrac{11}{7}$. Следи $\log_{12} 54 = \dfrac{\log_2 54}{\log_2 12} =$

$$\frac{\log_2 3^3 + \log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 2^2} = \frac{3x+1}{x+2} = 3 - \frac{5}{x+2} > 3 - \frac{5}{\frac{11}{7} + 2} = \frac{8}{5}. \qquad (\blacktriangle)$$

Како је $3 < 2^2$, следи $x = \log_2 3 < 2$, па је $\log_{24} 48 = \dfrac{\log_2 48}{\log_2 24} =$

$$\frac{\log_2 3 + \log_2 2^4}{\log_2 3 + \log_2 2^3} = \frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3} > 1 + \frac{1}{2+3} = \frac{6}{5}. \qquad (\blacktriangledown)$$

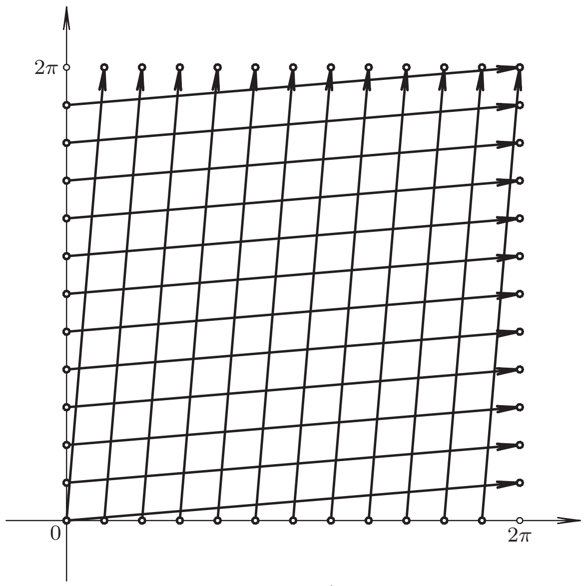
Коначно, из ($\blacktriangle$) и ($\blacktriangledown$) следи $(\log_{24} 48)^2 + (\log_{12} 54)^2 > \left(\dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{5}\right)^2 = 4$.

5. Нека је $\mathcal{P}(x)$ скуп познаника ђака x у групи и нека су a и b нека два ђака који се познају. Како не постоје три ђака која се међусобно познају, скупови $\mathcal{P}(a) \setminus \{b\}$ и $\mathcal{P}(b) \setminus \{a\}$ морају бити дисјунктни. По услову задатка је $|\mathcal{P}(a)| \geqslant 6$ и $|\mathcal{P}(b)| \geqslant 6$, па је укупан број ђака најмање $|\{a,b\}| + |\mathcal{P}(a) \setminus \{b\}| + |\mathcal{P}(b) \setminus \{a\}| \geqslant 2+5+5 = 12$.

Нека је група од 12 ђака таква да се може поделити на две скупине по 6 ђака, тако сваки ђак познаје све ђаке из скупине у којој се не налази. Оваква група задовољава услове задатка, па је одговор на питање задатка 12.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $\alpha \in [0, 2\pi)$ угао који минутна казаљка заклапа са полуправом чија је почетна тачка центар сата и која садржи тачку на којој се врх минутне казаљке налази у 12 часова. Да би време било коректно, угао β који сатна казаљка заклапа са истом полуправом мора бити облика $f_k(\alpha) = \dfrac{k\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{12}$ за неко $k \in \{0, 1, \ldots, 11\}$.



ДР 08 3А 1

Ако се и заменом положаја казаљки опет добија коректно време, мора бити $\alpha = f_l(\beta)$ за неко $l \in \{0, 1, \ldots, 11\}$. Следи $f_k(\alpha) = f_l^{-1}(\alpha)$ за неке $k, l \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ (за свако $k \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ функција f_k је инвертибилна и важи $f_k^{-1}(\beta) = -2k\pi + 12\beta$ за $\dfrac{k\pi}{6} \leqslant \beta < \dfrac{k\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}$). Такође, свако решење једначине $f_k(\alpha) = f_l^{-1}(\alpha)$ одређује пар $(f_k(\alpha), \alpha)$ који представља двоструко могући положај казаљки.

Следи да се број решења се може видети као број пресечних тачака графика функција $(f_k)_{k=0}^{11}$ (12 паралелних дужи без једног краја) и графика функција $(f_k^{-1})_{k=0}^{11}$ (12 паралелних дужи без једног краја), а тај број је $143 = 12 \cdot 12 - 1$ $(f_{11}(\alpha) = f_{11}^{-1}(\alpha) \Rightarrow \alpha = 2\pi \notin [0, 2\pi))$.

2. Степен полинома $P(x) = (x+1)^1 \cdot (x+2)^2 \cdot \ldots \cdot (x+n)^n$ је $s = 1+2+\ldots+n = \dfrac{n^2+n}{2}$. Како је $P(x)$ моничан, може се записати у облику $P(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + a_{s-2}x^{s-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, за неке реалне $a_{s-1}, \ldots, a_1, a_0$. Коефицијент уз $x^{\frac{n^2+n-4}{2}}$ је a_{s-2} (јер је $s = \dfrac{n^2+n}{2} = \dfrac{n^2+n-4}{2} + 2$). Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_s$ све нуле полинома $P(x)$. Из његове дефиниције, следи да су то бројеви $-1, -2, -2, -3, -3, -3, \ldots, \underbrace{-n, -n, ..., -n}_{n}$. На основу Виетових формула важи $a_{s-2} = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant s} x_i x_j$, па је

$$
\begin{aligned}
a_{s-2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{s} x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{s} x_i^2 \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (j \cdot (-j)) \right)^2 \\
&- \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(j \cdot (-j)^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} j^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)}{18}.
\end{aligned}
$$

3. Нека је пољима треће и шесте врсте додељена црвена, а осталим пољима бела боја. Тада, како год се на табли изабере подтабла 3×3 или подтабла 4×4 она садржи паран број поља којима је додељена бела боја (3×3 увек садржи 6, а 4×4 или 8 или 12 оваквих поља), па се након примене описаних операција парност збира на овим пољима не мења. Међутим, збир бројева на овим пољима на почетку је непаран (почетни збир бројева у i-тој врсти је $\displaystyle\sum_{j=1}^{7}(2j+1) = 63$, па је почетни збир на пољима којима је додељена бела боја $63 \cdot (1+2+4+5+7+8) = 63 \cdot 27$), а на крају би требао да буде 0, тако да је одговор на питање задатка негативан.

4. Нека је $L = 7^x + 12^y$, $D = 13^z$.

Ако је $y = 1$, тада је $L \equiv 5 \pmod 7$ и $D \equiv (-1)^z \pmod 7$, тј. или $D \equiv 1 \pmod 7$ или $D \equiv -1 \pmod 7$, па не важи $L \equiv D \pmod 7$, а самим тим не важи и $L = D$.

Нека је $y \geqslant 2$. Тада $8 \mid 12^2 \mid 12^y$, па је $L \equiv (-1)^x + 0 \equiv (-1)^x \pmod 8$. Како за свако $k \in \mathbb{N}_0$ важи $5^{2k} \equiv 1 \pmod 8$ и $5^{2k+1} \equiv 5 \pmod 8$, следи да је или $D \equiv 1 \pmod 8$ или $D \equiv 5 \pmod 8$, па $L = D$ може бити само ако је $L \equiv D \equiv 1 \pmod 8$, односно ако су бројеви x и z парни. Зато је $D \equiv (-1)^z \equiv 1 \pmod 7$, па да би било $L = D$, мора бити $5^y \equiv 1 \pmod 7$. Како је $r_7(5) = 6$ (тј. $5^6 \equiv 1 \pmod 7$ и $5^t \not\equiv 1 \pmod 7$ за све $t \in \{1,2,3,4,5\}$; 5 је примитивни корен по модулу 7), следи да $6 \mid y$. Дакле, x, y и z морају бити парни. Нека је $x = 2a$, $y = 2b$ и $z = 2c$, за неке $a, b, c \in \mathbb{N}$. Једначина се трансформише у

$$(7^a)^2 + (12^b)^2 = (13^c)^2,$$

односно бројеви $7^a, 12^b$ и 13^c чине примитивну (јер је $(7^a, 12^b) = 1$) Питагорину тројку, па постоје узајамно прости природни бројеви m и n, $m > n$, такви да је $7^a = m^2 - n^2$, $12^b = 2mn$ и $13^c = m^2 + n^2$. Из $2^{2b} \cdot 3^b = 12^b = 2mn$ (како су m и n узајамно прости бројеви, $m > n$) следи да могу наступити случајеви:

1° $n = 1$, $m = 2^{2b-1} \cdot 3^b$. Тада су $m-1$ и $m+1$ узастопни непарни бројеви, па не могу истовремено бити степени (са експонентом из $\mathbb{N}_0$) броја 7. Ово је у супротности са $7^a = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$;

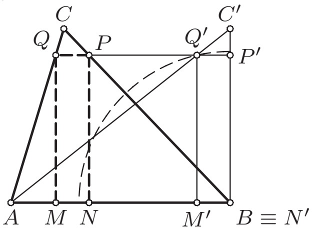
2° $\{m, n\} = \{2^{2b-1}, 3^b\}$. Тада је $|m^2 - n^2| \equiv$

$$\equiv |2^{4b-2} - 3^{2b}| \equiv |(2^4)^{b-1} \cdot 2^2 - 2^b| \equiv |2^{b-1} \cdot 2^2 - 2^b| \equiv |2^b| \pmod 7,$$

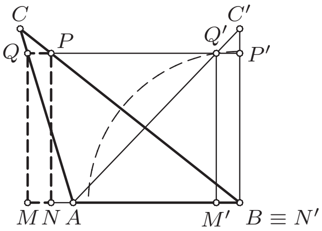
па $7 \nmid m^2 - n^2$, што је контрадикција са $7^a = m^2 - n^2$.

Дакле, $7^x + 12^y = 13^z$ нема решења у скупу природних бројева.

5. *Анализа.* Нека је c дужина странице AB и h_c дужина висине која одговара овој страници. Нека је C' тачка таква да је $C'B \perp AB$ и $CC' \parallel AB$. Тада је $\triangle ABC'$ правоугли троугао са висином која одговара страници AB дужине h_c. Нека је $M'N'P'Q'$ правоугаоник, такав да је $N'Q' = d$, $M', N' \in AB$, $P' \in BC'$ и $Q' \in C'A$ (јасно је да је тада $B \equiv N'$) и $P = BC \cap P'Q'$, $Q = CA \cap P'Q'$, а M и N подножја нормала из Q и P на AB, редом.



ДР 08 3А 5-1



ДР 08 3А 5-2

Тада је $MQ = NP = M'Q' = N'P' = h_c - C'P'$, а важи и $\dfrac{P'Q'}{AB} = \dfrac{C'P'}{h_c} = \dfrac{PQ}{AB}$ (сличност), па су правоугаоници $MNPQ$ и $M'N'P'Q'$ подударни.

Конструкција. Конструише се тачка C', дефинисана као у анализи. Тачка Q' је пресек дужи AC' и кружнице са центром у B полупречника d, $P = BC \cap P'Q'$, $Q = CA \cap P'Q'$, а су M и N подножја нормала из Q и P на AB, редом.

Доказ. Коректност конструкције следи из анализе.

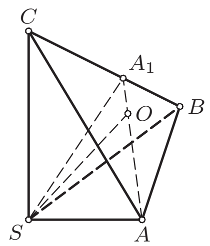
Дискусија. Сви кораци су добро дефинисани и јединствени, сем конструкције тачке Q'. Следи да задатак има 0, 1 или 2 решења, у зависности од тога у колико тачака кружница са центром у B полупречника d сече дуж AC' (како је висина $\triangle ABC'$ која одговара страници AC' једнака $\dfrac{ch_c}{\sqrt{c^2+h_c^2}}$, ако је $d < \dfrac{ch_c}{\sqrt{c^2+h_c^2}}$ или $d \geqslant \max\{c, h_c\}$ има 0 решења, ако је $d = \dfrac{ch_c}{\sqrt{c^2+h_c^2}}$ једно, а 2, иначе).

Трећи разред, Б категорија

1. Једначина прве кружнице је $(x-1)^2+(y-6)^2=5^2$ (тј. њен центар је $(1,6)$, а полупречник $r_1=5$), а друге $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{9}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$ (тј. њен центар је $(1,6)$, а полупречник $r_2=\dfrac{5}{2}$). Како је растојање између центара $\sqrt{(1-(-1))^2+\left(6-\dfrac{9}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{2}=r_1-r_2$, следи да се друга кружница налази унутар прве и да је додирује изнутра.

Ако тачка (x_0, y_0) припада и једној и другој кружници, тада је $x_0^2+y_0^2+2x_0-9y_0+15=0$ и $x_0^2+y_0^2-2x_0-12y_0+12=0$, одакле је (одузимањем) $4x_0+3y_0+3=0$, тј. права $4x+3y+3=0$ садржи ову тачку. Ова права не садржи више ниједну тачку неке од кружница. Заиста, ако би тачка припадала и првој кружници, њена координате задовољавају и једначину кружнице и једначину праве, па би се, опет одузимањем, добило да припада и другој кружници (и аналогно за другу кружницу). Како ова права има тачно једну заједничку тачку са кружницама, она им је тангента (Тангента 47, стр. 36, Писмени задаци, задатак 3).

2. Нека је A_1 подножје нормале из S на праву BC. Како је $AS \perp SBC$ и $SA_1 \perp BC$, по теореми о три нормале следи $AA_1 \perp BC$, па је $BC \perp SAA_1$. Одатле је свака раван која садржи BC, па и раван ABC нормална на раван SAA_1, па пројекција O тачке S на ABC припада пресеку ових равни, тј. правој AA_1.



ДР 08 3Б 2

Аналогно, тачка O припада правој BB_1, где је B_1 подножје нормале из B на AC, тј. O је ортоцентар $\triangle ABC$.

Како је $\triangle SAA_1$ правоугли (јер је $\sphericalangle A_1SA = 90°$) и како је O подножје нормале из темена правог угла овог троугле, следи $\triangle AOS \sim \triangle OA_1S$ ($\sphericalangle A_1SO = \sphericalangle SAA_1$), одакле је $\dfrac{SA_1}{OA_1} = \dfrac{AA_1}{SA_1}$, тј. $SA_1^2 = OA_1 \cdot SA_1$.

Коначно, површина $\triangle SBC$ је $\dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot SA_1 = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot \sqrt{OA_1 \cdot SA_1} = \sqrt{\dfrac{BC \cdot AA_1}{2} \cdot \dfrac{BC \cdot OA_1}{2}} = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$.

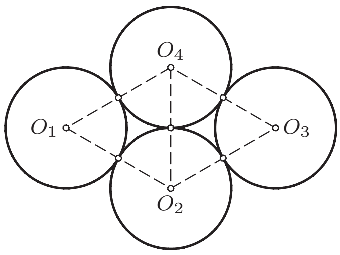
3. Да би једначина била дефинисана, мора бити $1 - x \geqslant 0$ (поткорена величина мора бити ненегативна) и $x > 0 \wedge x \neq 1$ (јер је x у бази логаритма), тј. мора бити $x \in (0,1)$.

Из $\sqrt{1-x} > 0$ следи $5^{\sqrt{1-x}} > 1$, па како је логаритамска функција опадајућа ако јој је основа мања од 1, следи $\log_x 5^{\sqrt{1-x}} < \log_x 1 = 0$, тј. $\operatorname{sgn}\left(\log_x 5^{\sqrt{1-x}}\right) = -1$, па се неједначина из задатка своди на

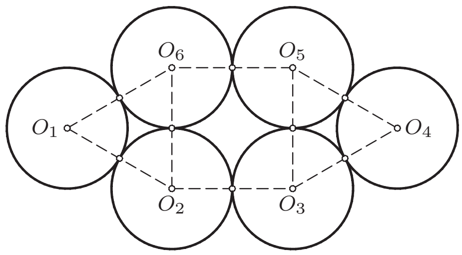
$$\begin{aligned} & \log_{\frac{1}{3}}\left(4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x}\right) \geqslant -1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{4} \cdot \left(4^{\cos^2 x}\right)^2 + 4^{\cos^2 x} \geqslant 3 \Leftrightarrow \left(4^{\cos^2 x}\right)^2 + 4 \cdot 4^{\cos^2 x} - 12 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(4^{\cos^2 x} - 2\right) \cdot \left(4^{\cos^2 x} + 6\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Како је $4^{\cos^2 x} + 6 > 0$, неједначина се своди на $4^{\cos^2 x} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \geqslant \log_4 2 = \dfrac{1}{2}$, што је за $x \in (0,1)$ испуњено ако и само ако је $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$.

4. Нека је K број кружница које задовољавају услове задатка. Како свака кружница додирује тачно 3 друге кружнице и како свака додирна тачка припада тачно двема кружницама, укупан број додирних тачака је $\dfrac{3K}{2}$, па K мора бити паран број. Следи да је одговор на питање дела (б) негативан.



ДР 08 3Б 4-1



ДР 08 3Б 4-2

Како постоји тетиван многоугао $A_1A_2\dots A_{1\,004}$, такав да је $A_{2k}A_{2k+1}=2$ $(A_{1\,005}\equiv A_1)$ за свако $k\in\{1,2,\dots,502\}$ и $A_{2k-1}A_{2k}=\sqrt{3}$ за свако $k\in\{1,2,\dots,502\}$, ако се над сваком страницом дужине $\sqrt{3}$ овог многоугла конструише фигура подударна са фигуром са слике ДР 08 3Б 4-1 (тако да се O_1 и O_3 поклапају са теменима многоугла; $O_1O_3=\sqrt{3}$), добија са конфигурација која задовољава услове задатка са $4\cdot 502=2\,008$ кружница.

Како постоји тетиван многоугао $A_1A_2\dots A_{1\,002}$, такав да је $A_{2k-1}A_{2k}=2$ за свако $k\in\{1,2,\dots,501\}$, $A_{2k}A_{2k+1}=\sqrt{3}$ за свако $k\in\{1,2,\dots,500\}$ и $A_{1\,002}A_1=2+\sqrt{3}$, ако страницом дужине $A_{1\,002}A_1=2+\sqrt{3}$ овог многоугла конструише фигура подударна са фигуром са слике ДР 08 3Б 4-2 $(O_1O_4=2+\sqrt{3})$, а над сваком страницом дужине $\sqrt{3}$ фигура подударна са фигуром са слике ДР 08 3Б 4-1, добија са конфигурација која задовољава услове задатка са $6+4\cdot 500=2\,006$ кружница.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Како је $(3,4)=1$ и $(3,25)=1$, према Ојлеровој теореми је $3^2\equiv 1 \pmod 4$ и $3^{20}\equiv 1 \pmod{25}$, па је $3^{20}\equiv 1 \pmod{100}$. Из $a_1=3$ и $a_2=3^3=27$ следи

$$a_3=3^{a_2}=3^{27}=3^{20}\cdot 3^7\equiv 1\cdot 3^7\equiv 81\cdot 27\equiv 87 \pmod{100}.$$

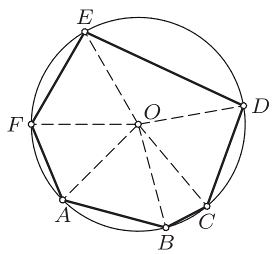
Ако је $a_n\equiv 87 \pmod{100}$, тада је $a_n=100k+87=20(5k+4)+7$, одакле је

$$a_{n+1}=3^{a_n}=3^{100k+87}=\left(3^{20}\right)^{5k+4}\cdot 3^7\equiv 3^7\equiv 87 \pmod{100},$$

па следи $a_n\equiv 87 \pmod{100}$, односно, индукцијом, $a_n\equiv 87 \pmod{100}$ за све $n\geqslant 3$.

Дакле, $a_{2008}\equiv 87 \pmod{100}$, тј. a_{2008} завршава цифрама 87.

2. Нека је дата конфигурација смештена у комплексну раван тако да је уочени круг јединични, тј. његовом центру (нека је то тачка O) одговара 0 и нека су a,b,c,d,e,f комплексни бројеви који одговарају тачкама A,B,C,D,E,F, редом. Нека је $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$. $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ и $\triangle OEF$ су једнакостранични, па важи



ДР 08 4А 2

$$a+\varepsilon\cdot b=0,\qquad \varepsilon\cdot c+\varepsilon^2\cdot d=0,\qquad \varepsilon^2\cdot e+f=0.$$

Сабирањем се добија

$$\frac{a+f}{2}+\varepsilon\cdot\frac{b+c}{2}+\varepsilon^2\cdot\frac{d+e}{2}=0,$$

одакле следи да је троугао са теменима у тачкама које одговарају бројевима $\frac{a+f}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ и $\frac{d+e}{2}$ једнакостраничан.

Заиста, ако за различите комплексне бројеве x, y, z важи $x+\varepsilon\cdot y+\varepsilon^2\cdot z=0$, тада је

$$x-y=-(1+\varepsilon)\cdot y-\varepsilon^2\cdot z=\varepsilon^2(y-z)\quad\Rightarrow\quad |x-y|=|y-z|$$

и, аналогно, $|x-y|=|z-x|$.

3. Нека је $P(x)=x^3-9x+9$. Како су α, β и γ све нуле $P(x)$, на основу Виетових формула је

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-9,\quad \alpha\beta\gamma=-9.$$

Нека је $y=\alpha^2+\alpha-6$. Треба доказати да је $y\in\{\beta,\gamma\}\Leftrightarrow(y=\beta\vee y=\gamma)\Leftrightarrow(y-\beta)(y-\gamma)=0$. Како је α нула $P(x)$, следи $(y-\beta)(y-\gamma)=$

$$\begin{aligned}
&=y^2-(\beta+\gamma)y+\beta\gamma=(\alpha^2+\alpha-6)^2-(-\alpha)(\alpha^2+\alpha-6)+\frac{-9}{\alpha}\\
&=\alpha^4+3\alpha^3-10\alpha^2-18\alpha+36-\frac{9}{\alpha}\\
&=\alpha(\alpha^3-9\alpha+9)+3\alpha^3-\alpha^2-27\alpha+36-\frac{9}{\alpha}\\
&=\alpha\cdot 0+3(\alpha^3-9\alpha+9)-\alpha^2+9-\frac{9}{\alpha}=3\cdot 0-\frac{\alpha^3-9\alpha+9}{\alpha}=0,
\end{aligned}$$

тј. $\alpha^2+\alpha-6\in\{\beta,\gamma\}$.

Друго решење. Број $\alpha^2+\alpha-6$ је нула полинома $P(x)$. То следи из

$$\begin{aligned}
P\left(\alpha^2+\alpha-6\right)&=\left(\alpha^2+\alpha-6\right)^3-9\left(\alpha^2+\alpha-6\right)+9\\
&=\alpha^6+3\alpha^5-15\alpha^4-35\alpha^3+81\alpha^2+99\alpha-153\\
&=\left(\alpha^6-9\alpha^4+9\alpha^3\right)+\left(3\alpha^5-27\alpha^3+27\alpha^2\right)\\
&+\left(-6\alpha^4+54\alpha^2-54\alpha\right)+\left(-17\alpha^3+153\alpha-153\right)\\
&=\alpha^3P(\alpha)+3\alpha^2P(\alpha)-6\alpha P(\alpha)-17P(\alpha)=0.
\end{aligned}$$

Како су α, β и γ све нуле $P(x)$, следи $\alpha^2+\alpha-6\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ако је $\alpha^2+\alpha-6=\alpha$, тада је или $\alpha=\sqrt{6}$ или $\alpha=-\sqrt{6}$. Како је

$$P\left(\pm\sqrt{6}\right)=\pm 6\cdot\sqrt{6}\mp 9\cdot\sqrt{6}+9=\mp 3\cdot\sqrt{6}+9\neq 0,$$

α није нула $P(x)$. Из добијене контрадикције следи $\alpha^2+\alpha-6\neq\alpha$.

Коначно, из $\alpha^2+\alpha-6\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ и $\alpha^2+\alpha-6\neq\alpha$, следи $\alpha^2+\alpha-6\in\{\beta,\gamma\}$.

Треће решење. Нуле $P(x)$ се могу израчунати. За решавање једначине трећег степена могу се користити Карданове формуле (решења x_1, x_2 и x_3 једначине $x^3+px+q=0$ одређују су формулама $x_i=u_i+v_i$ $(i\in\{1,2,3\})$, где су u_i $(i\in\{1,2,3\})$, сва решења једначине $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, док су v_i $(i\in\{1,2,3\})$, одређени са $v_i=-\frac{p}{3u_i}$).

Прво треба решити једначину $u^3=-\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{9^2}{4}+\frac{(-9)^3}{27}}$, односно

$$u^3=-\frac{9}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot i=3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)=(\sqrt{3})^3\cdot(\cos 150^\circ+\sin 150^\circ)\,.$$

Решења последње једначине су $u_1=\sqrt{3}\cdot(\cos 50^\circ+\sin 50^\circ)$, $u_2=\sqrt{3}\cdot(\cos 170^\circ+\sin 170^\circ)$ и $u_3=\sqrt{3}\cdot(\cos 290^\circ+\sin 290^\circ)$, па је $v_1=\sqrt{3}\cdot(\cos(-50^\circ)+\sin(-50^\circ))$, $v_2=\sqrt{3}\cdot(\cos(-170^\circ)+\sin(-170^\circ))$ и $v_3=\sqrt{3}\cdot(\cos(-290^\circ)+\sin(-290^\circ))$ (пошто је $v_i=-\frac{-9}{u_i}$, за $i\in\{1,2,3\}$). Дакле, сва решења једначине $x^3-9x+9=0$ су $x_1=u_1+v_1=2\sqrt{3}\cdot\cos 50^\circ$, $x_2=u_2+v_2=2\sqrt{3}\cdot\cos 170^\circ$ и $x_3=u_3+v_3=2\sqrt{3}\cos 290^\circ$. Сада се могу израчунати вредности израза $x_i^2+x_i-6$ (за $i\in\{1,2,3\}$):

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_1-6 &= \left(2\sqrt{3}\cos 50^\circ\right)^2+\left(2\sqrt{3}\cos 50^\circ\right)-6\\
&= 12\cdot\cos^2 50^\circ+2\sqrt{3}\cdot\cos 50^\circ-6\\
&= 12\cdot\frac{1+\cos 100^\circ}{2}+2\sqrt{3}\cdot\cos 50^\circ-6\\
&= 2\sqrt{3}\cdot\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 100^\circ+\cos 50^\circ\right)\\
&= 2\sqrt{3}\cdot(2\cos 30^\circ\cos 100^\circ+\cos 50^\circ)\\
&= 2\sqrt{3}\cdot(\cos 70^\circ+\cos 130^\circ+\cos 50^\circ)\\
&= 2\sqrt{3}\cos 70^\circ=2\sqrt{3}\cos 290^\circ=x_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^2+x_2-6 &= \left(2\sqrt{3}\cos 170^\circ\right)^2+\left(2\sqrt{3}\cos 170^\circ\right)-6\\
&= 12\cdot\cos^2 170^\circ+2\sqrt{3}\cdot\cos 170^\circ-6\\
&= 12\cdot\frac{1+\cos 340^\circ}{2}+2\sqrt{3}\cdot\cos 170^\circ-6\\
&= 2\sqrt{3}\cdot\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 340^\circ+\cos 170^\circ\right)\\
&= 2\sqrt{3}\cdot(2\cos 30^\circ\cos 340^\circ+\cos 170^\circ)\\
&= 2\sqrt{3}\cdot(\cos 310^\circ+\cos 370^\circ+\cos 170^\circ)\\
&= 2\sqrt{3}\cos 310^\circ=2\sqrt{3}\cos 50^\circ=x_1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3^2+x_3-6 &= \left(2\sqrt{3}\cos 290^\circ\right)^2+\left(2\sqrt{3}\cos 290^\circ\right)-6\\
&= 12\cdot\cos^2 290^\circ+2\sqrt{3}\cdot\cos 290^\circ-6\\
&= 12\cdot\frac{1+\cos 580^\circ}{2}+2\sqrt{3}\cdot\cos 290^\circ-6\\
&= 2\sqrt{3}\cdot\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 580^\circ+\cos 290^\circ\right)\\
&= 2\sqrt{3}\cdot(2\cos 30^\circ\cos 580^\circ+\cos 290^\circ)\\
&= 2\sqrt{3}\cdot(\cos 550^\circ+\cos 610^\circ+\cos 290^\circ)\\
&= 2\sqrt{3}\cos 550^\circ=2\sqrt{3}\cos 170^\circ=x_2.
\end{aligned}
$$

Ако је $S=\{x_1,x_2,x_3\}$, из предходног следи $x_i^2+x_i-6\in S\setminus\{x_i\}$ за свако $i\in\{1,2,3\}$, чиме је тврђење доказано.

4. Нека је $a=\log_{2006}(x-1)$ и $b=\log_{2008}(x+1)$. Тада се једначина трансформише у $2008^a-2006^b=2$. Како је $2006^a=2006^{\log_{2006}(x-1)}=x-1$ и $2008^b=2008^{\log_{2008}(x+1)}=x+1$, следи и $2008^b-2006^a=2$, па је $2008^a-2006^b=2=2008^b-2006^a$, одакле је $2008^a+2006^a=2008^b+2006^b$. Из последње једнакости следи да је $a=b$ (јер је функција 2008^x+2006^x строго растућа). Дакле, једначина се своди на $2008^a-2006^a=2$, односно $\left(\frac{2008}{2006}\right)^a=1+2\cdot\left(\frac{1}{2006}\right)^a$.
Пошто је функција на левој страни последње једначине строго растућа, а на десној строго опадајућа, та једначина може имати највише једно решење, а једно њено решење је $a=1$. Из $1=a=\log_{2006}(x-1)$, следи да је једино решење једначине $x=2007$.

5. Нека је I број парова суседних сијалица различитих стања (сијалице су суседне ако се налазе на пољима која имају заједничку страницу). У почетку је $I=0$, а (ако би одговор на питање задатка био позитиван) на крају ће бити $I=3$. Међутим, ниједан корак не мења парност I (операција 1° не мења број различитих парова у једној врсти; ако је k број различитих парова, таквих да једна од сијалица припада врсти на коју се примењује 1°, а друга у њој суседној врсти, тада је $10-k$ број парова сијалица који нису различити таквих да једна припада првопоменутој, а друга другопоменутој врсти; након примене операције, број оваквих различитих парова ће бити $10-k\equiv k \pmod 2$); аналогно и за операцију 2° (симетрија); операција 3° смањује I за 4). Из добијене контрадикције следи да је одговор на питање задатка негативан.

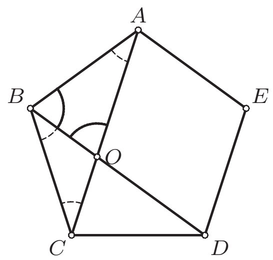
Четврти разред, Б категорија

1. Због дефинисаности једначине мора бити $x-4a+16\geqslant 0$, $x-2a+4$, $x>0$, тј. $x\geqslant 4a-16$, $x\geqslant 2a-4$ и $x\geqslant 0$. Даље је $\sqrt{x-4a+16}-2\cdot\sqrt{x-2a+4}+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x-4a+16}+\sqrt{x}=2\cdot\sqrt{x-2a+4}$, а како су у последњој једначини обе стране ненегативне, она је еквивалентна са (квадрирањем) $x-4a+16+x+2\cdot\sqrt{x-4a+16}\cdot\sqrt{x}=4x-8a+16 \Leftrightarrow \sqrt{x-4a+16}\cdot\sqrt{x}=x-2a$.

Како је лева страна последње једначине ненегативна, мора бити и десна, тј. мора бити $x \geqslant 2a$. При овом услову, једначина је еквивалентна са (квадрирањем) $(x-4a+16)x=(x-2a)^2 \Leftrightarrow x^2-4ax+16x = x^2-4ax+4a^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{a^2}{4}$. Ово јесте решење ако су испуњена сва ограничења која су постављана у току рада, па је то потребно испитати. Како је $\dfrac{a^2}{4} \geqslant 0$, услов $x \geqslant 0$ је тривијално испуњен. Слично, услов $x \geqslant 4a-16$ се своди на $\dfrac{a^2}{4} \geqslant 4a-16 \Leftrightarrow a^2-16a+64 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-8)^2 \geqslant 0$ (што је увек тачно). Ако решење задовољава услов $x \geqslant 2a$, задовољава и услов $x \geqslant 2a-4$, па је потребно проверити само први. Како је $\dfrac{a^2}{4} \geqslant 2a \Leftrightarrow a^2-8a=a(a-8) \geqslant 0$, он је испуњен за $a \in (-\infty,0\,]\cup[\,8,\infty)$.

Дакле, за $a \in (-\infty,0\,]\cup[\,8,\infty)$ једначина има једно решење $x=\dfrac{a^2}{4}$, а за $a \in (0,8)$ једначина нема решења.

2. Збир унутрашњих углова петоугла је $3\cdot 180^\circ$, па је $\sphericalangle ABC = \dfrac{3}{5}\cdot 180^\circ = 108^\circ$. Како је $AB=BC$, $\triangle ABC$ је једакокраки са угловима над краковима од 36°.
Како је и $\sphericalangle CBO = 36^\circ$, следи да је и $\triangle COB$ једакокраки са угловима над краковима од 36°, па је $\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{AB}{AC}$, тј. $AC\cdot OC = AB\cdot BC$.



ДР 08 4Б 2

Коначно, тврђење следи из претходног и $AB=BC=AO$, јер је $\sphericalangle ABO=72^\circ$ и $\sphericalangle BOA = 180^\circ-\sphericalangle ABO-\sphericalangle OAB = 180^\circ-72^\circ-36^\circ=72^\circ$, тј. и $\triangle BOA$ је једнакокрак (Тангента 44, стр. 42, Писмени задаци, задатак 2).

3. Нека је $I=m^{4n+1}-m=m(m^{4n}-1)$. Бројеви m и $m^{4n}-1$ су различите парности, па је бар један од њих паран (самим тим и I). Ако $3\mid m$, тада $3\mid I$. Иначе је $m^2\equiv 1 \pmod 3$, па је $m^{4n}=(m^2)^{2n}\equiv 1 \pmod 3$, тј. $3\mid m^{4n}-1$ (тј. опет $3\mid I$). Ако $5\mid m$, тада $5\mid I$. Иначе је $m^4\equiv 1 \pmod 5$, па је $m^{4n}=(m^4)^n\equiv 1 \pmod 5$, тј. $5\mid m^{4n}-1$ (тј. опет $3\mid I$).

Коначно, I је дељиво и са 2 и са 3 и са 5, па како су ови бројеви узајамно прости, I је дељиво и са $2\cdot 3\cdot 5=30$.

4. Четири различите (компланарне) тачке, које нису колинеарне, у неком поредку чине темена паралелограма ако и само ако је средиште дужи одређене неким двема тачкама идентично са средиштем дужи одређеном другим двема тачкама. Следи да су могуће следеће ситуације:

1° $\dfrac{1+z}{2} = \dfrac{z^2+z^3}{2} \Leftrightarrow (1+z) = z^2(1+z) \Leftrightarrow (z-1)(z+1)^2 \Leftrightarrow z \in \{-1,1\}$. Међутим, тада је $z^2 = 1$, па ове тачке нису различите;

2° $\dfrac{1+z^2}{2} = \dfrac{z+z^3}{2} \Leftrightarrow 1+z^2 = z(1+z^2) \Leftrightarrow (z-1)(z-i)(z+i) \Leftrightarrow z \in \{1,-i,i\}$. Као и у случају 1° $z=1$ није решење. Ако је $z=i$, уочене тачке су $\{1,i,-1,-i\}$ (различите), а ако је $z=-i$, уочене тачке су $\{1,-i,-1,i\}$ (различите);

3° $\dfrac{1+z^3}{2} = \dfrac{z+z^2}{2} \Leftrightarrow 0 = z^3-z^2-z+1 = z^2(z-1)-(z-1) = (z-1)^2(z+1) \Leftrightarrow z \in \{-1,1\}$, па као и у случају 1° ово нису решења.

Дакле, решење задатка је $z \in \{-i,i\}$.

5. Неједначина је дефинисана за

$$x^2 > 0 \wedge x^2 \neq 1 \wedge 2-x^2 > 0 \wedge x^2+5x+7 > 0 \wedge x^2+5x+7 \neq 1$$
$$\wedge 5x+7 > 0, \text{ тј. за } x \in D = \left(-\frac{7}{5}, -1\right) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup \left(1, \sqrt{2}\right).$$

За $x \in D$ је $x+2>0$ и $x+3>0$, па је $x^2+5x+7 = (x+2)(x+3)+1 > 1$. Пошто је $5x+7 < x^2+5x+7$ за свако $x \in D$, како је логаритамска функција растућа ако је њена основа већа од 1, за свако $x \in D$ важи

$$\log_{x^2+5x+7}(5x+7) < \log_{x^2+5x+7}(x^2+5x+7) = 1. \qquad (\S)$$

Ако је $x \in D$ и $x^2 > 1$, тада је $2-x^2 < 1$, па је $\log_{x^2}(2-x^2) < \log_{x^2} 1 = 0$. Ако је $x \in D$ и $x^2 < 1$, тада је $2-x^2 > 1$, па (како је логаритамска функција опадајућа ако је њена основа мања од 1), важи $\log_{x^2}(2-x^2) < \log_{x^2} 1 = 0$. Дакле, за свако $x \in D$ важи

$$\log_{x^2}(2-x^2) < 0. \qquad (\P)$$

Из (¶) и (§) следи (за свако $x \in D$) $\log_{x^2}(2-x^2) + \log_{x^2+5x+7}(5x+7) < 0+1 = 1$, па је решење полазне неједначине $x \in D$.

Садржај