ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2008/2009.

Београд, 2009.

ЛЕСКОВАЦ И ОКОЛИНА

Општина Лесковац са $1024km^2$ површине једна је од највећих у Србији. Град лежи на надморској висини од $225m$, уз коридор Е–10 на $280km$ од Београда и $160km$ од Скопља. Град Лесковац, према попису становништва из 2002. године, има 156 252 становника, који живе у 144 насељена места на територији општине. Према овим подацима општина спада у једну од највећих и најнасељенијих у републици.

Историју лесковачког краја писали су сведоци европске цивилизације. Живели су овде, ратовали и остављали трагове Дарданци, Авари, Келти, Римљани и Византијци. Из тих времена пронађени су археолошки остаци на Хисару изнад Лесковца, на локалитету Градац близу Злокућана, у Лапотинцу, Малој Копашници, у долини Слатинске реке, на потезу Кале код Грделице итд.

Занимљиви су и вредни налази из римског и рановизантијског периода. Највећи део накита, ситне пластике и посуђа из овог периода чува се у *Народном музеју* у Лесковцу.

У време владавине Турака ово место је било седиште нахије по имену Дубочица. Средином деветнаестог века Лесковац је по величини био други град у Србији, после Београда, а бележи се да је имао 13 фабрика текстила, и зато је касније добио име „Српски Манчестер". Између два светска рата Лесковац је био други индустријски град у краљевини, а бележи се да је лесковачки басен производио чак 40% укупне вунарске производње у краљевини Југославији.

Између шездесетих и осамдесетих година прошлог века лесковачки текстила и текстилних машина био је највећи сајам те врсте у Европи. Због низа пратећих манифестација град је живео „од сајма до сајма", а сви хотели и смештајни капацитети у то време били су попуњени. Са колапсом текстилне индустрије исту судбину доживео је лесковачки сајам.

Данас основу туристичке понуде Лесковца чине бројне манифестације, природне атракције и многобројни културно-историјски споменици.

У граду и околини налази се много културно-исоријских споменика и атракција. Један од најзначајнијих археолошких локалитета је *Царичин град (Јустиниана прима).* Налази се на $29km$ западно од Лесковца, $7km$ од Лебана, у близини села Прекопчелица. Основао га је Јустинијан I у VI веку, на месту аутохтоне градине Бедеријане. Град је свој највећи процват имао од тридесете до педесете године VI века, када су изграђени, поред акрополе, средњи град и, на месту каснијег доњег града, базилика и цистерна. После честих упада Авара и инфилтрације Словена, око 615. године град напушта становништво; живот у граду се гаси, вероватно због пожара или пресецања водовода у време последњих опсада.

На падинама планине Кукавице изнад Вучја, $18km$ јужно од Лесковца, налазе се остаци тврђаве познате као *Скобаљић град.* То је утврђење из

XV века, које је саградио војвода Никола Скобаљић, бранећи подручје Дубочице од Турака. Скобаљић град је мало, али значајно утврђење, које потиче још из римског и касноантичког доба.

У центру Лесковца је стара *црква „Оџаклија"*, грађена у време Карађорђевог устанка, од 1805. до 1812. године, обновљена је 1839. године. Грађевина је укопана у земљу. Архитектура није значајна, али је специфична по томе што у њој постоји озидан оџак, што је чини јединственом у свету. То је једнобродна грађевина без куполе; има трем са аркадама и дрвеним стубовима, а у самим зидовима уграђивани су земљани лонци на размаку од по један метар, са грлићима окренутим ка унутрашњости цркве, што доприноси изузетној акустици.

Лесковачка Саборна црква налази се у самом центру града. Грађена је од 1922. до 1931. године. свечаном освећењу присуствовао је краљ Југославије Александар I Карађорђевић. Грађевина је љупка, живописна, а ипак монументална. Спој је моравске китињатости, косовско-метохијске елевације са нешто мало рашких елемената спојених у хармоничну и чврсту целину. Црква је изнутра осликана фрескама.

У центру, уз Саборну цркву, налази се кућа Боре Димитријевића–Пиксле, подигнута у првој половини XIX века. Једно време била је седиште турског паше. То је симетрична грађевина са унутрашњим степеништем, два еркера на конзолама према улици и затвореним дабонином на два стубца. У кући Боре Димитријевића–Пиксле налази се део поставке Народног музеја и представља реконструкцију градске куће са краја XIX века.

Кућа Шоп–Ђокића налази се на Масариковом тргу и стара је преко 120 година. Рађена је у балканском стилу грађевинске архитектуре XIX века са приземљем и спратом. У највећој соби таваница је урађена у дуборезу. Врло мало је таквих таваница сачувано. Занимљиве су и различито обрађене розете на оквирима прозора и врата.

Значајну подлогу за развој туризма на овом подручју представљају манифестације. Забавне, културне, спорцке или сајамске–оне представљају својеврсан повод за довођење туриста и презентацију туристичке понуде овог подручја.

Роштиљијада је манифестација по којој се препознаје Лесковац. Према броју посетилаца спада у сам врх туристичких приредби у републици. За седам дана трајања манифестацију посети преко 400 000 гостију. Организатор Роштиљијаде, Туристичка организација Лесковац, чувајући основну идеју–афирмацију кулинарских специјалитета од роштиља–из године у годину концепцију прилагођава европским нормативима. Такође, организује такмичења за прављење највеће пљескавице на свету, највеће пљескавице из руке, такмичење ученика угоститељских школа, такмичења мајстора роштиља... Такође, организатор води рачуна да се пратећим садржајима привуче млађа популација.

Лесковачко лето је најдужа манифестација у земљи, а по садржају и концепцији из године у годину побеђује све већу пажњу. За неколико претходних година профилисало је свој карактер. Одржава се у етно комплексу Шоп-Ђокић, у самом центру града. Почиње кад и лето и траје до средине јула. Програм је подељен у три сегмента. Први чине спортске активности, други сегмент су дечији програми, а трећи су забавно-уметнички садржаји намењени грађанству.

Карневал је манифестација која садржи елементе локалне културе кроз фолклор (групе изворног и стилизованог фолклора), традицију (ношње, обичаји, историјске личности, традиционалне вештине. . .), манифестације, спорт, туристичке атракције, занимљивости. . . Повод да се организује карневал нађен је у коледарској традицији, што је била особеност овог дела Србије, а као обавезан детаљ покладних свечаности у знак буђења пролећа. У Лесковцу се тридесетих година прошлог века, када је овај град био један од најзначајнијих индустријских центара Краљевине Југославије, одржавао Ускршњи карневал, чију традицију такође настављамо.

Једна од најпрестижнијих средњих школа у граду је свакако наша Гимназија. Далеке 1879. године први пут су се огласила звона за 32 ученика, који су кренули у први и други разред Ниже Гимназије у Лесковцу. Први наставник кога је министар просвете овластио за предавача био је Миленко Ранчић, учитељ из Тополе. Најлепша кућа у Лесковцу, кућа Пашагића, изабрана је за школску зграду. Нова школска зграда почела је да се зида тек 1891. године, а ученици су се у њу уселили јануара 1895.

Од тада је прошло 129 година и увелико се припремамо да прославимо 130. рођендан. На дешавања у школи у великој мери су утицали бурни историјски догађаји, који су обележили цео двадесети век.

Али једно је остајало увек исто: гимназију су похађали најбољи ђаци, они који су хтели више, они који су нам отварали видике ка лепшем и бољем, они који су нас представљали у најбољем светлу где год да крену.

Данас школу похађа око 880 ученика од првог до четвртог разреда на друштвено-језичком и природно-математичком смеру. Са њима ради осамдесетак професора и стручних сарадника, настава се одвија у учионицама опште намене и у кабинетима, а школа има и сопствену фискултурну салу. Веома је активан и ђачки парламент, а захваљујући њиховој упорности организовано је и изведено неколико веома успешних акција–изграђен је сунчани сат у школском дворишту, засађене саднице јасена, стално се дају пројекције филмова, а средства која се том приликом прикупе уплаћују се у хуманитарне сврхе. . .

Свесни значаја образовно-васпитног рада и ми који радимо са ученицима стално се трудимо да им што више отворимо видике и да их не спутавамо у њиховим жељама да буду другачији од осталих, а да то све буде њима у корист. Радујемо се и када људи ван наше школе похвале наша постигнућа: награди за најбољег професора хемије од Српског хемијског друштва, медаљи за изузетне резултате постигнуте у образовно-васпитном раду од Скупштине Града Лесковца, пехарима за спортске резултате, похвалници за учешће и пласман у полуфинале квиза „Здраво Европо” од РТС-а, награди за најбољи школски часопис од Друштва за српски језик и књижевност, успесима наше драмске секције на драмским сусретима у Крагујевцу. . .

Остварили смо сарадњу са Народним позориштем у Београду, тако да наши ученици могу да уживо виде великане српске опере, балета, глуме.

Ученици трећег и четвртог разреда су имали прилике да путују у иностранство и да се упознају са културом и обичајима народа у средњој Европи (Чешка, Словачка и Мађарска) и са културама старог Рима, Венеције, Фиренце, Ђенове.

Знамо да можемо још више и боље. Зато и ове године јуришамо ка новим сазнањима и новим наградама, да достигнемо претке и да задужимо покољења.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2008/2009.

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет, Београд
2. Балтић мр Владимир, Факултет организационих наука, Београд
3. Гајић др Борислав, Математички институт САНУ
4. Димитријевић мр Слађана, ПМФ, Крагујевац
5. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
6. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
7. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
8. Ђукић Душан, Универзитет у Торонту, Канада
9. Живаљевић др Раде, Математички институт САНУ
10. Икодиновић др Небојша, ПМФ, Крагујевац
11. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд
12. Кртинић мр Ђорђе, Математички факултет, Београд, председник
13. Лукић Миливоје, Калтех, САД
14. Матић Иван, Беркли, САД
15. Милићевић др Ђорђе, Универзитет у Мичигену, САД
16. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
17. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
18. Радновић др Милена, Математички институт САНУ, Београд
19. Сеничић Александар, Гимназија, Краљево
20. Станојевић Раде, Хамилтон институт, Ирска
21. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад
22. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
23. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд
24. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица
2. Рожњик мр Андреа, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31.01.2009.

Први разред, А категорија

1. Нека је X унутрашња тачка троугла ABC, а T његово тежиште. Нека су M, N тачке које припадају страници BC, P, Q тачке које припадају страници CA, R, S тачке које припадају страници AB, тако да важи $MQ \parallel AB$, $PS \parallel BC$, $RN \parallel CA$ и $MQ \cap PS \cap RN = \{X\}$. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта дужи MN, PQ, RS, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{XT}\,.$$

2. Од 16 људи, међу којима су по 4 из Србије, Румуније, Бугарске и Македоније, треба изабрати 6.

(а) Колико има таквих избора у којима је заступљена свака земља?

(б) Колико има таквих избора у којима нема више од два представника неке земље?

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

4. Да ли постоји бијекција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f\left(f(x)\right) - f(x) = 56x + 2\,008\,?$$

5. Нека је S средиште дужи AB, а C и D тачке које припадају полукружници над пречником AB, тако да C припада луку AD и да је $\sphericalangle CSD = 90^\circ$. Нека је E пресечна тачка правих AC и BD, а F пресечна тачка правих AD и BC. Доказати да вектор $\overrightarrow{EF}$ не зависи од избора тачака C и D.

Први разред, Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n такве да је $\dfrac{2n+1}{n+2}$ природан број.

2. Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$.

(а) Одредити функцију f ако је $f(x) = g\left(g(x)\right) - g(x)$.

(б) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. У зависности од A и B одредити које од следећих скуповних формула су тачне:

(а) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$; **(б)** $A \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;

(в) $A \cap B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$; **(г)** $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$;

(д) $A \cup B = A \Rightarrow A \subseteq B$.

4. За које вредности реалног параметра a једначина $\big||x| - 1\big| = a$ има максималан број различитих реалних решења?

5. Видети трећи задатак за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ тако да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

2. Нека је $X = \{f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \mid a \in \mathbb{R}\}$ (скуп парабола).

(а) Доказати да све параболе из X секу x-осу.

(б) Одредити једначину геометријског места темена свих ових парабола.

(в) За коју вредност параметра a је збир квадрата корена једначине $f_a(x) = 0$ најмањи?

3. Одредити $z \in \mathbb{C}$ такве да је број $\dfrac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + 10z^2 + 3}$ реалан.

4. Нека су a, b, x и y реални бројеви за које важи $a + b = x + y$ и $a^4 + b^4 = x^4 + y^4$. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a^n + b^n = x^n + y^n$.

5. Племе Вгаб има азбуку која садржи само слова А, Б, В и Г. На њиховом језику су смислене све речи које у свом запису немају два иста слова на суседним местима, док остале то нису. Колико има смислених осмословних речи у језику овог племена које свако слово азбуке садрже тачно два пута?

Други разред, Б категорија

1. Да ли постоји реалан број a за који једначина $x^2 - |x| + a = 0$ има јединствено решење?

2. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, који су конјуговани свом квадрату.

3. Нека су a, b, c странице, а s полуобим троугла ABC. Нека су t_a, t_b, t_c тежишне дужи које одговарају страницама a, b, c, редом. Доказати да је $\dfrac{3}{2} \cdot s < t_a + t_b + t_c < 2s$.

4. Видети други задатак за други разред А категорије.

5. На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика који су заједно решили све задатке.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$10^{-3}x^{\log_{10} x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x.$$

2. Нека су x, y, z реални бројеви, такви да је

$$x \geqslant 4, \quad y \geqslant 5, \quad z \geqslant 6 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 90.$$

Доказати неједнакост $x+y+z \geqslant 16$. Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

3. Нека су m и n различити природни бројеви. Доказати да постоји комплексан број z модула 1 такав да је $|1-z^m+z^n| \geqslant 2$.

4. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ потпуни системи остатака по модулу n. Доказати да $r_1t_1, r_2t_2, \ldots, r_nt_n$ није потпун систем остатака по модулу n.

5. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви, такви да је $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Доказати неједнакост

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n-x_i}{1-x_i}\right).$$

Када се у овој неједнакости достиже једнакост?

Трећи разред, Б категорија

1.Нека је $m \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0, \\ x & + & (m-1)y & + & 2z & = & 1, \\ -x & + & 2y & + & (2m-1)z & = & 3, \\ x & + & y & + & 4z & = & 4. \end{array}$$

2. Површина праве купе је четири пута већа од површине њене основе. Одредити однос висине и полупречника основе те купе.

3. Видети први задатак за други разред А категорије.

4. Видети пети задатак за други разред Б категорије.

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Израчунати површину правилне четворостране призме чија је запремина $V=12\sqrt{3}$, а збир дужина свих ивица је најмањи могући.

2. Нека је k најмањи број потеза који је потребно начинити за пребацивање скакача из доњег левог угла у горњи десни угао шаховске табле 8×8. На колико различитих начина се то може учинити у тачно k потеза?

3. Нека је H ортоцентар, а O центар описане кружнице троугла ABC. Нормална пројекција темена A на праву BC припада симетрали странице AC. Одредити $\dfrac{CH}{BO}$.

4. Видети трећи задатак за трећи разред А категорије.

5. Нека је $(a_n)_{n\geqslant 1}$ низ природних бројева, који је, за свако N, периодичан по модулу N почев од неког члана и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Доказати да је и низ $(a_n^{a_n})_{n\geqslant 1}$, за свако N, периодичан по модулу N почев од неког члана.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -1, \\ -4x & - & 2y & + & az & = & a, \\ (a-1)x & + & y & + & z & = & 2. \end{array}$$

2. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{q} = 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$, при чему је $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$ и $\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 60^\circ$.

3. Израчунати површину правилне тростране пирамиде, основне ивице $a = 2$, чија су сва три ивична угла при врху прави.

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\log_2\left(x(1-x)\right) = -2 + \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|.$$

5. Видети други задатак за четврти разред А категорије.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Први разред, А категорија

1. Нека су M и N различите тачке које не припадају правој p. Конструисати троугао ABC, такав да страница AB припада p, а тачке M и N су подножја висина троугла из темена A и B, редом.

2. Нека су p, q, r реални бројеви за које важи $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 0$ и $p+q+r = 1$. Доказати да за све реалне a, b, c важи

$$a^2 + b^2 + c^2 = (pa+qb+rc)^2 + (qa+rb+pc)^2 + (ra+pb+qc)^2.$$

3. За сваку тачку првог квадранта одредити праву која пролази кроз ту тачку, а са позитивним деловима координантних оса гради троугао минималне површине.

4. Одредити све природне бројеве n за које је тачно тврђење:

> Природан број x дељив је са n ако и само ако је збир цифара броја x дељив са n.

5. Два тима, сваки са по 6 фудбалера, имају на располагању 4 шортса и 4 мајице, у свакој од следећих боја – црвеној, плавој и белој. На колико начина фудбалери могу да се обуку за утакмицу тако да сваки фудбалер обуче шортс и мајицу, ако се зна да сваки тим мора да има своју карактеристичну боју?

Напомена. Боја је карактеристична за тим ако сваки играч тог тима има бар један одевни предмет те боје, а да притом нико из супротног тима нема ниједан одевни предмет те боје.

Први разред, Б категорија

1. Доказати да је број $2\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2}$ рационалан.

2. Нека су D и E тачке које припадају хипотенузи BC правоуглог троугла ABC, тако да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати $\sphericalangle DAE$.

3. Колико целобројних решења има једначина $|x| + |y| = 2009$?

4. Нека је r полупречник уписане кружнице, а h висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла. Доказати да важи $\dfrac{2}{5} < \dfrac{r}{h} < \dfrac{1}{2}$.

5. На колико начина се 20 карата, међу којима су четири даме, може поделити на две групе од по 10 карата, тако да у једној групи буде три даме, а у другој једна дама?

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}=1.$$

2. Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји $\varphi \in \mathbb{R}$ тако да је

$$\sin\varphi = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{n-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Да ли тврђење важи ако је $n \in \mathbb{Z}$?

3. Нека је P површина троугла, а R полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост $P \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

4. На колико начина се c црвених, p плавих и b белих куглица може поређати у низ, тако да се никоје 2 плаве куглице не налазе једна до друге (куглице исте боје се не разликују)?

5. Одредити све природне бројеве n за које је $2^n + 3^n + 4^n$ потпун квадрат.

Други разред, Б категорија

1. **(а)** Одредити остатак при дељењу броја $\left(5^{41}+2\right)\left(3^{105}-1\right)+357\cdot\left(5^{70}+1\right)$ са 4.

(б) Испитати да ли је број $2^{60}+3^{70}$ дељив са 13.

2. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Права PQ, таква да је $P\in k_1$ и $Q\in k_2$, садржи тачку A. Доказати да однос $\dfrac{BP}{BQ}$ не зависи од праве PQ.

3. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & \sqrt{x_2} & = & 1,\\ x_2 & + & \sqrt{x_3} & = & 1,\\ x_3 & + & \sqrt{x_1} & = & 1. \end{array}$$

4. Око круга полупречника r описан је четвороугао $ABCD$. Тачка додира дели страницу AB на одсечке дужина a и b, а страницу AD на одсечке дужина a и c. Доказати да важи $r>\sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}}$.

5. Видети први задатак за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $n>2$ природан број. Доказати да важи $\sin\dfrac{\pi}{n}>\dfrac{3}{\sqrt{n^2+9}}$.

2. Нека су a, b и c комплексни бројеви, тако да тачке које им одговарају у комплексној равни представљају темена једнакостраничног троугла. Доказати да једначина $az^2+bz+c=0$ у скупу комплексних бројева има бар једно решење јединичног модула.

3. Нека је S центар уписане кружнице оштроуглог троугла ABC. Уписана кружница додирује страницу AB тачки X. Права XS сече уписану кружницу у тачки M (различитој од X). Нека је X' пресечна тачка праве CM и странице AB, а L тачка на дужи $X'C$, тако да важи $X'L=CM$. Доказати да су тачке A, L, S колинеарне ако и само ако важи $AB=AC$.

4. Одредити највећи заједнички делилац свих елемената скупа

$$\left\{n^{13}-n \mid\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

5. Одредити највећи могући број ловаца који се могу сместити на шаховску таблу димензија 7×7, тако да сваки од њих напада парно много других ловаца.

Напомена. Ловац напада фигуру ако се налазе на истој (не нужно главној) дијагонали и ако се између њих не налази још нека фигура.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (2, 0, 1)$. Одредити вектор $\vec{x}$, који припада равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогоналан је на вектор $\vec{b}$ и важи $\vec{a} \cdot \vec{x} = 7$.

2. Нека су AB и AC тетиве круга полупречника R. Тачка M припада правој AB, а њено растојање од праве AC је једнако AC. Тачка N припада правој AC, а њено растојање од праве AB је једнако AB. Израчунати MN.

3. Одредити све вредности реалног параметра p тако да једначина

$$(p-1)4^x - 4 \cdot 2^x + (p+2) = 0$$

има бар једно решење.

4. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка странице a и нека тачка P полови AB, тачка Q полови BC, а тачка R припада дужи CC_1, тако да је $CR : RC_1 = 1 : 2$. Одредити обим и површину фигуре која се добија у пресеку равни PQR и коцке.

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. (а) Доказати да за $y \geqslant 2$ важи $2e^y > y^3 + 4$.

(б) Доказати да је функција $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x) = \ln\left(e^{x + \frac{1}{x}} - 1\right)$$

конвексна.

2. У неправоуглом троуглу ABC, тачка H је ортоцентар, а тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека је X пресек правих AH и EF, а Y пресечна тачка кружница описаних око троугла AHC и EBC, различита од C. Доказати да су тачке C, X и Y колинеарне.

3. Одредити последње две цифре броја $2^{2^p} + 1$, где је p прост број.

4. Нека је $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3}$. Одредити све полиноме p са целобројним коефицијентима, за које важи

1° $p(x) = p(\varepsilon x)$ за свако $x \in \mathbb{C}$;

2° $p(1) = 2001$;

3° $p(2) = 2009$.

5. Видети пети задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a, тако да једначина $x^3 - 3x^2 - 9x = a$ има три реална и међусобно различита решења.

2. Дата је зарубљена купа у коју се може уписати лопта. Површина омотача те зарубљене купе је четири пута већа од разлике површина основа. Одредити однос запремина лопте и зарубљене купе.

3. Нека је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан са $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ и $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \dots .$$

Доказати да је број S коначан и израчунати га.

4. Видети трећи задатак за други разред А категорије.

5. Одредити све вредности реалног параметра a за које је скуп решења неједначине $\log_{x+a}\left(x^2 + a^2\right) \geqslant 2$ коначан.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

Први разред, А категорија

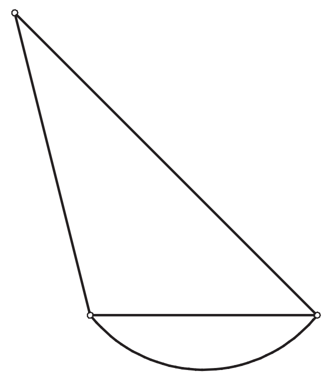
1. Колико има функција $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таквих да за свако $x \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}\ ?$$

2. Нека тачка C припада дужи AB и нека су k_0, k_{01} и k_{02} кругови чији су пречници AB, AC и CB, редом. Нека је D тачка пресека кружнице k_0 и нормале кроз C на дуж AB. Нека су k_1 и k_2 кругови који се налазе у истој полуравни одређеној правом AB у којој и тачка D и који додирују, редом, кружнице k_{01}, k_0 и дуж CD, односно кружнице k_{02}, k_0 и дуж CD. Нека је k круг најмањег полупречника који садржи и додирује кругове k_1 и k_2. Доказати да је пречник круга k једнак дужини дужи CD.

3. На кружници је уочен коначан број лукова, таквих да је дужина сваког од њих мања од полуобима кружнице и да свака три од њих имају непразан пресек. Доказати да постоји тачка кружнице која се не налази ни на једном луку.

4. Конструисати барем једну праву која фигуру са слике, састављену од троугла и кружног одсечка, дели на два по површини једнака дела.



5. Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак 2008^{2009}?

Први разред, Б категорија

1. Одредити остатак при дељењу броја $5^{102} + 4^{99} + 3^{100}$ са 13.

2. Нека су V, S, T различите тачке равни. Конструисати троугао ABC, тако да су тачке V, S и T пресечне тачке описане кружнице овог троугла са правама којима припадају висина, симетрала угла и тежишна линија које одговарају темену C, редом.

3. Доказати да за све реалне x и y важи неједнакост

$$x^2y^4 + 2 \cdot \left(x^2 + 2\right) \cdot y^2 + 4xy + x^2 \geqslant 4xy^3.$$

4. Нека је ABC тупоугли троугао ($\sphericalangle ABC > 90^\circ$) и нека је R полупречник описане кружнице овог троугла. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C секу праву AB у тачкама L и M, редом. Ако је $CL = CM$, доказати да је $4R^2 = AC^2 + BC^2$.

5. На колико начина је могуће у свако поље табеле са две врсте и 2009 колона уписати природан број не већи од 2803, тако да ни у једној колони већи број не буде изнад мањег.

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$28 \cdot 3 \cdot 2009 = 28^x \cdot 3^{x^2} \cdot 2009^{x^3}.$$

2. Одредити све природне бројеве n за које једначина

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx + n + 1 = 0$$

има бар једно решење у скупу рационалних бројева.

3. Нека су r и R полупречници уписане и описане кружнице, редом, оштроуглог троугла, а α, β и γ његови углови. Доказати да важи

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geqslant\frac{9R}{R+r}.$$

4. На колико начина се 6 различитих куглица може распоредити у 6 кутија које се не разликују? У сваку кутију се може распоредити произвољан број куглица; кутија може бити и празна.

5. Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара једнак 2009^{2008}?

Други разред, Б категорија

1. Свежи краставци садрже 99% воде. Ако свежи краставци преноће, ујутру садрже 98% воде. Ако је увече у продавници остављено 100 килограма свежих краставаца, колико ће килограма ујутру бити за продају?

2. Нека су P и Q средишта страница AB и AC, редом, једнакостраничног троугла ABC. Нека је R пресечна тачка праве PQ и описане кружнице $\triangle ABC$, тако да је $P-Q-R$. Доказати да је $\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{PR}{PQ}$.

3. Који је од бројева $a=\log_3 10$ и $b=\log_4 17$ већи?

4. Нека је $a\in\mathbb{R}$ и функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x)=ax^2+x+1.$$

Одредити све вредности параметра a, тако да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи неједнакост

$$f\left(f(x)\right)\geqslant 0.$$

5. Видети први задатак за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да полином

$$P(x)=(x^4+x^3-3x^2+x+1)^{2008}=a_{8032}x^{8032}+a_{8031}x^{8031}+\ldots+a_1x+a_0$$

има бар два негативна коефицијента.

2. Кружнице k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. Тангента на k_1 у A и тангента на k_2 у B се секу у тачки M. Произвољна права кроз A сече кругове k_1 и k_2 у тачкама X и Y редом. Ако је $BY\cap MX=P$ и $MA\cap k_2=Q$, доказати да је $PQ\parallel XY$.

3. Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ ненегативни реални бројеви такви да је $x_0 = x_1 = 0$, $x_n = x_{n+1} = 1$. Доказати да постоји $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ за које важи:

$$|x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j| \geqslant \frac{4}{n^2}.$$

4. Одредити све природне бројеве a, b, c, тако да важи $4 \mid a + b$ и $a^2 - 2a = b^2 + c^2$.

5. Четири детета имају чоколаду правоугаоног облика са 10 редова и по 6 коцкица у реду. Свако дете држи чоколаду за један угао, и жели да поједе парче у облику правоугаоника (са страницама паралелним ивицама чоколаде) које садржи тај угао. На колико начина је могуће одломити таква четири парчета, ако чоколада може да се ломи само по линијама између коцкица?

Трећи разред, Б категорија

1. У xOy-равни одредити једначине страница троугла ABC, ако су координате тачке $A(0, -9)$, једначина праве која садржи тежишну дуж која одговара темену B је $x+2y+13 = 0$, а једначина праве која садржи висину која одговара темену C је $3x + y + 19 = 0$.

2. Нека тачка M припада описаној кружници једнакостраничног $\triangle ABC$. Ако је полупречник ове кружнице R, израчунати $MA^4+MB^4+MC^4$.

3. У праву купу полупречника основе $r = 17$ и изводнице $s = \sqrt{545}$ уписана је права тространа призма основних ивица $a = 17$, $b = 10$ и $c = 9$, тако да се темена доње основе налазе у основи купе, а горње на омотачу. Израчунати запремину призме.

4. Колико се највише коња може поставити на шаховску таблу димензија 7×7 тако да се никоја два не туку?

5. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2 \geqslant \log_{x^3+1} x^3 \geqslant \ldots \geqslant \log_{x^n+1} x^n \geqslant \ldots.$$

Четврти разред, А категорија

1. Нека је

$$P(x) = \left(x^{2009} - 2009\right) \cdot \left(x^{2008} - 2008\right) \cdot \ldots \cdot \left(x^1 - 1\right).$$

Одредити све $a \in \mathbb{C}$ такве да $(x - a)^2 \mid P(x)$.

2. Видети други задатак за трећи разред А категорије.

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да важи

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

4. Видети четврти задатак за трећи разред А категорије.

5. Одредити најмање n са особином да ма како се постави n дама на шаховску таблу димензија 2009×2009, може се изабрати 2009 дама, тако да се никоје две од њих не нападају.

Напомена. На једном пољу табле може се налазити само једна дама. Дама напада фигуру ако се налазе у истој врсти, у истој колони или на истој (не нужно главној) дијагонали.

Четврти разред, Б категорија

1. Збир три броја је 14. Ако се средњи по величини повећа за 1, добијају се три узастопна члана аритметичког низа. Ако се исти број смањи за 1, добијају се три узастопна члана геометријског низа. Одредити збир квадрата та три броја.

2. Одредити све вредности реалног параметра a за које су неједначине

$$\log_{x^2}(x+6) \geqslant \frac{1}{4} \qquad \text{и} \qquad \log_{x+a}(x+4) \leqslant 1$$

еквивалентне.

3. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и нека је функција $f : [\,0, 2\pi\,] \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x.$$

Одредити $\max\limits_{x \in [\,0,2\pi\,]} f(x)$ (у функцији од a, b, c).

4. Видети четврти задатак за трећи разред Б категорије.

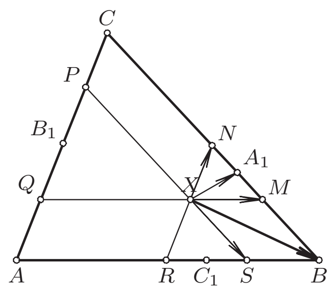
5. Странице троугла ABC су узастопни чланови аритметичке прогресије. Наћи углове овог троугла, ако су и одговарајуће тежишне линије t_a, t_b и t_c узастопни чланови аритметичке прогресије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 02.02.2008.

Први разред, А категорија

1. Како је A_1 средиште дужи MN, следи да је $\overrightarrow{XA_1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{XN}\right)$.

Аналогно је $\overrightarrow{XB_1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}\right)$ и $\overrightarrow{XC_1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{XR}+\overrightarrow{XS}\right)$.



ОП 09 1А 1

Четвороугао $XSBM$ је паралелограм (XB је његова дијагонала), па је $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{XS}$. Аналогно, $XNCP$ и $XQAR$ су паралелограми, па је $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XN}+\overrightarrow{XP}$ и $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XQ}+\overrightarrow{XR}$.

Из претходног и $3\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$ (јер је T тежиште $\triangle ABC$) следи

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XA_1}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{XC_1} &= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{XN})+\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ})+\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{XR}+\overrightarrow{XS})\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\overrightarrow{XS}+\overrightarrow{XM}\right)+\left(\overrightarrow{XN}+\overrightarrow{XP}\right)+\left(\overrightarrow{XQ}+\overrightarrow{XR}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XA}\right) = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{XT},\end{aligned}$$

што је и требало доказати (Тангента 53, стр. 41, Писмени задаци, задатак 5).

2. (а) Како је заступљен представник сваке земље, следи да или једна земља има 3 представника (остале три по 1) или две земље имају 2 представника (остале две по 1).

1° Ако једна земља има 3 представника, њен избор се може извршити на $\binom{4}{3}$ начина, њена 3 представника на $\binom{4}{3}$ начина, док се представник неке од преосталих земаља може извршити на $\binom{4}{1}$ начина, па у овој ситуацији постоји $\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{1}^3 = 1\,024$ избора.

2° Ако две земље имају 2 представника, њихов избор се може извршити на $\binom{4}{2}$ начина, за сваку од њих 2 представника на $\binom{4}{2}$ начина, док се представник неке од преосталих земаља може извршити на $\binom{4}{1}$ начина, па у овој ситуацији постоји $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}^2\cdot\binom{4}{1}^2 = 3\,456$ избора.

Дакле, одговор на питање дела (а) је $1\,024 + 3\,456 = 4\,480$ избора.

(б) Како свака од земаља има највише 2 представника, следи да бар три земље морају имати представнике, тј. или три земље имају по 2 представника или (ако свака земља има представника) две земље имају 2, а две једног представника.

1° Ако три земље имају по 2 представника, њихов избор се може извршити на $\binom{4}{3}$ начина, а по 2 представника у свакој од њих на $\binom{4}{2}$ начина, па у овој ситуацији постоји $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}^3 = 864$ избора.

2° Ако две земље имају 2 представника (а две једног), број избора је исти као у другом делу дела (а), тј. у овом случају има $3\,456$ избора.

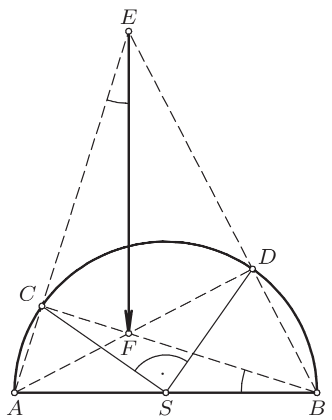
Дакле, одговор на питање дела (б) је $864 + 3\,456 = 4\,320$ избора.

3. Ако $11 \nmid n^2 + 3n + 5$, како је $121 = 11 \cdot 11$, следи и да $121 \nmid n^2 + 3n + 5$. Ако $11 \mid n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$, следи да $11 \mid (n+7)(n-4)$. Како је 11 прост број, следи да је бар један од бројева $n + 7$ и $n - 4$ дељив са 11. Међутим, како је њихова разлика 11, тада је дељив и други, па $121 \mid (n+7)(n-4)$, одакле $121 \nmid (n+7)(n-4) + 33 = n^2 + 3n + 5$.

4. Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Притом је $f\left(f(x)\right) - f(x) = a(ax+b) + b - (ax+b) = \left(a^2 - a\right) x + ab$. Ако је за неку овакву функцију $f\left(f(x)\right) - f(x) = 56x + 2\,008$, следи $a^2 - a = 56$ и $ab = 2\,008$. Једно од решења овог система је $a = 8 \neq 0$ и $b = 251$, тј. функција $f(x) = 56x + 251$ је бијекција која задовољава наведени услов.

5. Како је $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA = 90^\circ$ (углови над пречником), тачка F је ортоцентар $\triangle ABE$, па је $EF \perp AB$. Важи и $\sphericalangle FEC = \sphericalangle ABC$ (углови са нормалним крацима). Троугао AFC је правоугли ($\sphericalangle FCA = 90^\circ$) и важи $\sphericalangle FAC = \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle DSC = 45^\circ$ (периферни и централни угао над тетивом DC), па је он и једнакокрак, тј. важи $AC = CF$.

Следи да је $\triangle ABC \cong \triangle FEC$ ($AC = CF$ и једнакост углова), тј. $\left|\overrightarrow{EF}\right| = AB$, одакле следи тврђење задатка (Тангента 52, стр. 23, Наградни задаци, М722).



ОП 09 1А 5

Први разред, Б категорија

1. Како је $\dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \dfrac{3}{n+2}$, да би тражени број био цео, то мора бити и $\dfrac{3}{n+2}$. Како је $n \in \mathbb{N}$, следи $n+2 \geqslant 3$, а како је једини целобројни делилац броја 3 који је не мањи од 3 једнак 3, следи $n+2=3$, тј. $n=1$. Ако је $n=1$, вредност траженог израза је $\dfrac{2\cdot 1+1}{1+2} = 1$, тј. природан број, па је једино решење задатка $n=1$ (Тангента 53, стр. 37, Писмени задаци, задатак 5).

2. (а) За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = g\left(g(x)\right) - g(x) = 3(3x+1)+1-(3x+1) = 6x+3$.

(б) Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Дакле, f је бијекција и важи $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{6}$ (Тангента 53, стр. 37, Писмени задаци, задатак 4).

3. Израз $p \Rightarrow q$ (импликација) је нетачан ако и само ако је p тачно и q нетачно. Следи:

(а) $A \cup B = B$ је еквивалентно са $A \subseteq B$, па ако је и $A \cap B = \emptyset$, следи да мора бити $A = \emptyset$; дакле, ова импликација је тачна ако и само ако је или $A = \emptyset$ или $A \cap B \neq \emptyset$;

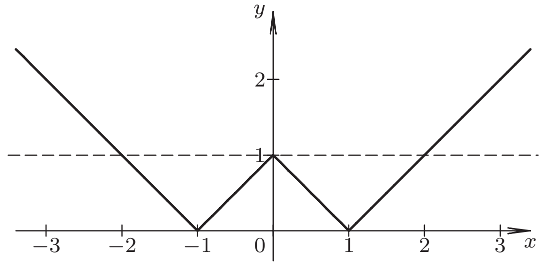
(б) $A \cap \emptyset = \emptyset$ је увек тачно, па да би била тачна импликација, мора бити $A = \emptyset$; дакле, ова импликација је тачна ако и само ако је $A = \emptyset$;

(в) израз $p \Leftrightarrow q$ (еквиваленција) је тачан ако и само ако је или и p тачно и q тачно или и p нетачно и q нетачно; $A \cap B = B$ је еквивалентно са $B \subseteq A$, а то је еквивалентно са $A \subseteq B$ ако и само ако је $A = B$; дакле, ова еквиваленција је тачна ако и само ако је или $A = B$ или ако су A и B неупоредиви (тј. не важи ни $A \subseteq B$ ни $B \subseteq A$);

(г) ако је $A \subseteq B$, тада је $A \setminus B = \emptyset$ (за све A, B), па је ово тврђење увек тачно;

(д) ако је $A \cup B = A$, тада је $B \subseteq A$; ако је, уз то, тачна и ова импликација, следи да је и $A \subseteq B$, па мора бити $A = B$; дакле, ова импликација је тачна ако и само ако је или $A \cup B \neq A$ или $A = B$.

(Тангента 48, стр. 34, Писмени задаци, задатак 7, измењен).



ОП 09 1Б 4

4. Нека је $f(x) = \big||x|-1\big|$. Како је $|x|-1 = \begin{cases} -x-1, & \text{за } x<0 \\ x-1, & \text{за } x \geqslant 0 \end{cases}$, следи да је $\big||x|-1\big| = \begin{cases} -x-1, & \text{за } x<-1 \\ x+1, & \text{за } -1 \leqslant x < 0 \\ -x+1, & \text{за } 0 \leqslant x < 1 \\ x-1, & \text{за } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Права паралелна x-оси може сећи овај график у највише четири тачаке, што се догађа за $0 < a < 1$ (Тангента 48, стр. 35, Писмени задаци, задатак 13).

5. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Заменом $x = 0$ се добија $0 \leqslant b^2 = \cos(b^2) - 1 \leqslant 0$, па следи $b = 0$.

Нека је $b = 0$. Следи, треба одредити све a тако да важи

$$a\,(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1.$$

Заменом $x = 2\pi$ се добија $\cos(2a\pi) = 1$, одакле је $2a\pi = 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, тј. a је цео број. Ако је $a = 0$, тражена релација је задовољена за свако реално x. Ако је $a \neq 0$, заменом $x = \dfrac{2\pi}{a}$ се добија $\cos\dfrac{2\pi}{a} = 1$, одакле је $\dfrac{2\pi}{a} = 2l\pi$ за неко $l \in \mathbb{Z}$, тј. и $\dfrac{1}{a}$ је цео број, па је $a \in \{-1, 1\}$. Ако је $a = 1$, тражена релација је задовољена за свако реално x. Ако је $a = -1$, тражена релација се своди на $\cos x = 1$, што не важи за свако реално x (на пример не важи за $x = \pi$).

Дакле, решење је $(a, b) \in \{(0,0), (1,0)\}$ (Тангента 53, стр. 41, Писмени задаци, задатак 1).

2. За свако $a \in \mathbb{R}$ једначина $f_a(x) = 0$ је квадратна и њена дискриминанта је $a^2 - 4(-2a-5) = a^2 + 8a + 20 = (a+4)^2 + 4 > 0$, тј. ова једначина има реална решења, одакле следи тврђење дела (а).

Теме параболе $Ax^2 + Bx + C$ је $\left(-\dfrac{B}{2A}, \dfrac{4AC - B^2}{4A}\right)$. Следи, теме параболе f_a је

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2} - 2a - 5\right) = \left(-\frac{a}{2}, -\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{a}{2}\right) - 5\right).$$

Функција $a \to -\dfrac{a}{2}$ је бијекција (из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$), па је једначина траженог геометријског места тачака $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

Ако су $x_{1,a}$ и $x_{2,a}$ корени једначине $f_a(x) = 0$ (по делу (а) они су чак и реални и различити), по Виетовим правилима је $x_{1,a} + x_{2,a} = -a$ и $x_{1,a} \cdot x_{2,a} = -2a - 5$, па је $x_{1,a}^2 + x_{2,a}^2 = (x_{1,a} + x_{2,a})^2 - 2 \cdot x_{1,a} \cdot x_{2,a} = a^2 + 4a + 10 = (a+2)^2 + 6 \geqslant 6$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = -2$ (Тангента 50, стр. 34, Писмени задаци, задатак 3).

3. Мора бити $z^4+10z^2+3\neq 0$, односно $z^2\notin\left\{-\frac{1}{3},-3\right\}$, тј.

$$z\notin\left\{-\sqrt{3}\,i,-\frac{1}{\sqrt{3}}\,i,\frac{1}{\sqrt{3}}\,i,\sqrt{3}\,i\right\}.$$

Под овим условом је $\dfrac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+10z^2+3} = 2-15\cdot\dfrac{z^2}{3z^4+10z^2+3}$, што је реалан број ако и само ако је

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{3z^4+10z^2+3}\in\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow\quad \left(z^2=0\vee\frac{3z^4+10z^2+3}{z^2}=10+3\cdot\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\in\mathbb{R}\right)\\ &\Leftrightarrow\quad \left(z^2=0\vee z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}\right).\end{aligned}$$

Како је $t\in\mathbb{C}$ реалан број ако и само ако је $t=\overline{t}$, следи (уз додатни услов $z\neq 0$)

$$\begin{aligned}z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}\quad &\Leftrightarrow\quad z^2+\frac{1}{z^2}=\overline{z}^2+\frac{1}{\overline{z}^2}\\ &\Leftrightarrow\quad z^4\overline{z}^2+\overline{z}^2-z^2\overline{z}^4-z^2=0\\ &\Leftrightarrow\quad \left(z^2-\overline{z}^2\right)\left(z^2\overline{z}^2-1\right)=0\\ &\Leftrightarrow\quad (z-\overline{z})\,(z+\overline{z})\left(|z|^2-1\right)=0.\end{aligned}$$

Следи да је $z\in\mathbb{R}$ (ако је $z-\overline{z}=0$) или $z\in i\mathbb{R}$ (ако је $z+\overline{z}=0$) или $|z|=1$.

Коначно, следи да је $\dfrac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+10z^2+3}$ реалан ако и само ако је

$$z\in\mathbb{R}\cup\left\{ti|\ t\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right\}\right\}\cup\{t\mid t\in\mathbb{C}\wedge|t|=1\}.$$

4. Нека је $u+v=S_{u,v}$, $uv=P_{u,v}$. Тада је

$$\begin{aligned}u^4+v^4 &= (u+v)^4-4uv(u^2+v^2)-6u^2v^2\\ &= (u+v)^4-4uv(u+v)^2+2(uv)^2\\ &= S_{u,v}^4-4P_{u,v}S_{u,v}^2+2P_{u,v}^2.\end{aligned}$$

По условима задатка је $S_{a,b}=S_{x,y}$, па из $a^4+b^4=x^4+y^4$ следи

$$\begin{aligned}4P_{a,b}S_{a,b}^2-2P_{a,b}^2 &= 4P_{x,y}S_{a,b}^2-2P_{x,y}^2\\ &\Leftrightarrow\ (P_{a,b}-P_{x,y})\left(P_{a,b}+P_{x,y}-2S_{a,b}^2\right)=0. \qquad (*)\end{aligned}$$

Ако је $P_{a,b}\neq P_{x,y}$, без умањења општости може се претпоставити да је $P_{a,b}>P_{x,y}$, па је $P_{a,b}+P_{x,y}-2S_{a,b}^2<2ab-2(a+b)^2=-2(a^2+ab+b^2)=-2\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot b^2\right]\leqslant 0$, тј. у $(*)$ први чинилац мора бити једнак нули, односно $P_{a,b}=P_{x,y}$.

Из добијене контрадикције, следи да је и $P_{a,b} = P_{x,y}$. На основу Виетових правила, следи да су a, b корени једначине $t^2 - S_{a,b}t + P_{a,b} = 0$. Аналогно, x, y корени једначине $t^2 - S_{x,y}t + P_{x,y} = 0$, па, како је $S_{a,b} = S_{x,y}$ и $P_{a,b} = P_{x,y}$, следи да је $\{a, b\} = \{x, y\}$, одакле следи и тврђење задатка.

5. Осмословних речи које садрже по тачно два слова азбуке има $\dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2\,520$ (пермутације са понављањем).

Нека је X_i, $i \in S = \{\text{А}, \text{Б}, \text{В}, \Gamma\}$, број осмословних речи, које свако слово садрже тачно два пута и које садрже два иста суседна слова i. Тада је број осмословних речи које садрже свако слово два пута и нису смислене једнак $\left|X_{\text{А}} \cup X_{\text{Б}} \cup X_{\text{В}} \cup X_{\Gamma}\right|$, односно, по принципу укључења и искључења:

$$\begin{aligned}\left|X_{\text{А}} \cup X_{\text{Б}} \cup X_{\text{В}} \cup X_{\Gamma}\right| &= \bigcup_{i \in S} |X_i| - \bigcup_{\substack{i,j \in S \\ i \neq j}} |X_i \cap X_j| + \bigcup_{\substack{i,j,k \in S \\ i \neq j \neq k \neq i}} |X_i \cap X_j \cap X_k| \\ &+ \left|X_{\text{А}} \cap X_{\text{Б}} \cap X_{\text{В}} \cap X_{\Gamma}\right|\end{aligned}$$

Број $|X_i|$ је једнак броју пермутација са понављањем 7 елемената, једног састављеног од два слова i и три пара преосталих слова, тј. једнак је $\dfrac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 630$.

Број $|X_i \cap X_j|$ је једнак броју пермутација са понављањем 6 елемената, једног састављеног од два слова i, једног састављеног од два слова j и два пара преосталих слова, тј. једнак је $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 180$.

Број $|X_i \cap X_j \cap X_k|$ је једнак броју пермутација са понављањем 5 елемената, једног састављеног од два слова i, једног састављеног од два слова j, једног састављеног од два слова k и два преостала (иста) слова, тј. једнак је $\dfrac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 60$.

Број $\left|X_{\text{А}} \cap X_{\text{Б}} \cap X_{\text{В}} \cap X_{\Gamma}\right|$ је једнак броју пермутација елемената АА, ББ, ВВ и ГГ, тј. једнак је $4! = 24$.

Коначно,

$$\left|X_{\text{А}} \cup X_{\text{Б}} \cup X_{\text{В}} \cup X_{\Gamma}\right| = \binom{4}{1} \cdot 630 - \binom{4}{2} \cdot 180 + \binom{4}{3} \cdot 60 - \binom{4}{4} \cdot 24 = 1\,656,$$

па је тражени број (пошто треба наћи број смислених речи) једнак $2\,520 - 1\,656 = 864$.

Други разред, Б категорија

1. Ако је x_0 решење једначине из задатка, тада је $(-x_0)^2 - |x_0| + a = x_0^2 - |x_0| + a = 0$, тј. и $-x_0$ је решење те једначине. Ако једначина има јединствено решење, следи $x_0 = -x_0$, тј. $x_0 = 0$, одакле је $a = 0$.

Дакле, једначина је $x^2 - |x| = 0$. Међутим, ова једначина има три решења ($x \in \{-1, 0, 1\}$), тј. ни у овом случају решење није јединствено, па тражени реалан број не постоји (Тангента 47, стр. 15, Наградни задаци, М607).

2. Како је $\overline{z} = x - iy$ и $z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy$, из $\overline{z} = z^2$ следи $x = x^2 - y^2$ и $-y = 2xy$. Из друге добијене једначине следи да је или $y = 0$ или $x = -\dfrac{1}{2}$.

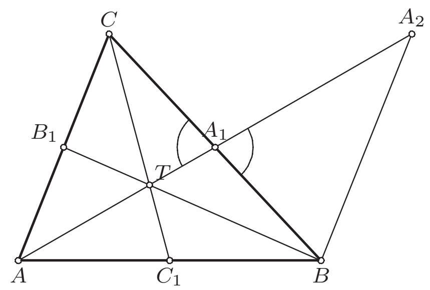
1° Ако је $y = 0$, прва једначина постаје $x = x^2$, тј. $x \in \{0, 1\}$.

2° Ако је $x = -\dfrac{1}{2}$, прва једначина постаје $y^2 = \dfrac{3}{4}$, тј. $y \in \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Дакле, решење задатка је $z \in \left\{0, 1, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right\}$ (Тангента 48, стр. 39, Писмени задаци, задатак 20, измењен).

3. Нека је T тежиште $\triangle ABC$. Како тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$, следи да су дужине AT, BT, CT једнаке $\dfrac{2}{3} \cdot t_a$, $\dfrac{2}{3} \cdot t_b$, $\dfrac{2}{3} \cdot t_c$, редом.

Из $\triangle BCT$ следи $\dfrac{2}{3} \cdot (t_b + t_c) > a$ (неједнакост троугла). Аналогно, из $\triangle ABT$ следи $\dfrac{2}{3} \cdot (t_a + t_b) > c$, а из $\triangle ACT$ следи $\dfrac{2}{3} \cdot (t_a + t_c) > b$. Сабирањем се добија $\dfrac{4}{3} \cdot (t_a + t_b + t_c) > a + b + c$, одакле је $t_a + t_b + t_c > \dfrac{3}{4} \cdot (a + b + c) = \dfrac{3}{2} \cdot s$.



ОП 09 2Б 3

Нека је A_1 средиште дужи BC, а A_2 таква да је да је $AA_1 = A_1A_2$ и $A - A_1 - A_2$.

Како је $\triangle ACA_1 \cong \triangle A_2BA_1$ ($BA_1 = CA_1 = \dfrac{a}{2}$, $AA_1 = A_1A_2$, $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BA_1A_2$ (унакрсни углови)), следи $BA_2 = CA = b$, из $\triangle ABA_2$ следи $b + c > 2\,t_a$ (опет неједнакост троугла). Аналогно је $a + b > 2\,t_c$ и $a + c >$

$2\,t_b$. Сабирањем ових неједнакости добија се $2(a+b+c) > 2\,(t_a + t_b + t_c)$, одакле се добија $t_a + t_b + t_c < 2s$.

4. Видети решење другог задатка за други разред А категорије.

5. Први задатак није урадило највише 40 ученика (јер га је урадило бар 60), па је број парова ученика, таквих да ниједан од ученика у том пару није решио први задатак, највише $\binom{40}{2}$. Како аналогно закључивање важи и за преостале задатке, следи да је број парова ученика, таквих да ниједан од ученика у том пару није решио неки од задатака, не већи од $5 \cdot \binom{40}{2} = 3\,900$. Међутим, како је укупан број парова ученика $\binom{100}{2} = 4\,950 > 3\,900$, следи да постоји пар ученика који су заједно решили свих пет задатака (Тангента 45, стр. 16, Наградни задаци, М566).

Трећи разред, А категорија

1. Једначина има смисла за $x > 0$. Нека је $t = \log_{10} x$. Тада је

$$\begin{aligned}
& 10^{-3} x^{\log_{10} x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x\right) = x^2 + 3x \\
\Leftrightarrow\quad & 10^{-3} 10^{\log_{10}^2 x} + x\left(\log_{10}^2 x - 2\log_{10} x - 3\right) = x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x^2} \cdot 10^{\log_{10}^2 x - 3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & 10^{t^2-2t-3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) = 1.
\end{aligned}$$

1° Ако је $t \in \{-1, 3\}$, тада је $t^2 - 2t - 3 = 0$ и $x = 10$, па следи да ове вредности доводе до решења једначине.

2° Ако је $t \in (-1, 3)$, тада је $t^2 - 2t - 3 < 0$, а како је и $x > 0$ следи $10^{t^2-2t-3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) < 10^0 + \frac{1}{x} \cdot 0 = 1$, па ове вредности не могу довести до решења једначине.

3° Ако је $t \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, тада је $t^2 - 2t - 3 > 0$, а како је и $x > 0$ следи $10^{t^2-2t-3} + \frac{1}{x} \cdot \left(t^2 - 2t - 3\right) > 10^0 + \frac{1}{x} \cdot 0 = 1$, па ове вредности не могу довести до решења једначине.

Дакле, решење једначине је $x \in \left\{\frac{1}{10}, 10^3\right\}$ (Тангента 53, стр. 21, Наградни задаци, М732).

2. Услов $x \geqslant 4, y \geqslant 5, z \geqslant 6$ је еквивалентан постојању $a, b, c \geqslant 0$, таквих да је $x = 4 + a, y = 5 + b, z = 6 + c$. Дакле, довољно је доказати да ако је $a^2 + b^2 + c^2 + 8a + 10b + 12c \geqslant 13$ за неке $a, b, c \geqslant 0$, тада је $a + b + c \geqslant 1$.

Нека је $a+b+c<1$. Тада је $0 \leqslant a,b,c<1$, па је $a^2 \geqslant a$, $b^2 \geqslant b$, $c^2 \geqslant c$, одакле је

$$13 > 13(a+b+c) \geqslant 9a+11b+13c \geqslant a^2+b^2+c^2+8a+10b+12c \geqslant 13.$$

Из добијене контрадикције, следи тврђење задатка.

Једнакост се постиже ако и само ако је $a+b+c=1$, па следи (опет је $0 \leqslant a,b,c \leqslant 1$)

$$13 = 13(a+b+c) \geqslant 9a+11b+13c \geqslant a^2+b^2+c^2+8a+10b+12c \geqslant 13,$$

тј. једнакост се постиже ако и само ако је

$$4b+2a=0, \quad a^2=a, \quad b^2=b, \quad c^2=c, \quad a^2+b^2+c^2+8a+10b+12c=13$$

(наравно, a,b,c су и даље ненегативни и $a+b+c=1$), односно ако и само ако је $a=b=0$, $c=1$, тј. ако и само ако је $(x,y,z)=(4,5,7)$.

3. Без умањења општости, може се претпоставити да је $(m,n)=1$. Иначе, ако је $m=d\cdot m_1$, $n=d\cdot n_1$ онда се проблем своди на аналоган за израз $1-z^{m_1}+z^{n_1}$ ($|z|=1 \Leftrightarrow |z|^d=1$).

Нека је $m \neq 1$ и ω такво да је $\omega^m=-1$. Тада је $1-\omega^m+\omega^n=2+\omega^n$, па је довољно показати да постоји овакво ω, тако да је $\operatorname{Re}(\omega^n) \geqslant 0$. Решења једначине $z^m=-1$ су $\omega_0\cdot\varepsilon^k$, за $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, где је $\omega_0=\cos\dfrac{\pi}{m}+i\sin\dfrac{\pi}{m}$ и $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$. Како је $\omega_0+\omega_0\cdot\varepsilon+\ldots+\omega_0\cdot\varepsilon^{m-1}=\omega_0\cdot\big(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{m-1}\big)=0$ и како бројеви $0,n,\ldots,(m-1)n$ чине потпун систем остатака по модулу m (m и n су узајамно прости), следи $\omega_0^n+(\omega_0\cdot\varepsilon)^n+\ldots+\big(\omega_0\cdot\varepsilon^{m-1}\big)^n=\omega_0^n\cdot\Big(1+\varepsilon^n+\ldots+\varepsilon^{(m-1)n}\Big)=0$, па бар један од ових бројева има ненегативан реалан део („геометријски": ако је тачка 2 тежиште правилног m-тоугла, бар једно његово теме се налази у произвољној полуравни чији руб садржи тачку 2).

Случај $n\neq 1$ се ради аналогно (тј. аналогно се показује да међу решењима једначине $z^n=1$ постоји бар једно, тако да је реални део његовог m-тог степена непозитиван).

4. У низовима $(r_i)_{i=1}^n$ и $(t_i)_{i=1}^n$ се јавља број дељив са n; ако је $r_i\equiv t_j\equiv 0 \pmod n$ за неке $i\neq j$, тада је $r_it_i\equiv r_jt_j\equiv 0 \pmod n$, па у низу $(r_it_i)_{i=1}^n$ не може бити n различитих бројева, тј. он не може бити потпун систем остатака по модулу n.

Дакле, без умањења општости, нека је $r_n=t_n=0$. Нека је p прост чинилац броја n, $n=pm$. Притом, ако n није степен броја 2, може се изабрати $p\neq 2$. Како је производ бројева, од којих је један дељив са m, такође дељив са m и како у сваком потпуном систему остатака по модулу n има једнак број бројева дељивих са m, следи да се може претпоставити да су $r_1,r_2,\ldots,r_{p-1}$, $t_1,t_2,\ldots,t_{p-1}$ и $r_1t_1,r_2t_2,\ldots,r_{p-1}t_{p-1}$ бројеви конгруентни са $m,2m,\ldots,(p-1)m$ (у неком редоследу).

1° Ако $p \mid m$, тада за неко $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ важи $r_i t_i = m$, тј. за неке $k, l \in \mathbb{N}$ важи $n \mid klm^2 - m$. Следи $pm \mid m(klm-1)$, па $p \mid klm - 1$, што је немогуће, јер из $p \mid m$ следи $(p, klm-1) = 1$.

2° Ако је $(p, m) = 1$, по малој Фермаовој теореми је $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, а по Вилсоновој $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, па следи

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p-1} \equiv m^{p-1}(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Аналогно је $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ и $(r_1 t_1) \cdot (r_2 t_2) \cdot \ldots \cdot (r_{p-1} t_{p-1}) \equiv -1 \pmod{p}$, па је

$$\begin{aligned} 1 &= (-1) \cdot (-1) \equiv (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p-1}) \cdot (t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{p-1}) \\ &= (r_1 t_1) \cdot (r_2 t_2) \cdot \ldots \cdot (r_{p-1} t_{p-1}) \equiv -1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

па $p \mid 2$, тј. $p = 2$. Како је бирано $p \neq 2$ (ако је то могуће), следи да је n степен броја 2. Међутим, по 1°, следи да је $n = 2$, што је у контрадикцији са условом задатка.

5. На основу неједнакости између геометријске и хармонијске средине следи (за свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$)

$$\left(\prod_{i \neq j}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \frac{n-1}{\sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{1 + \frac{1}{x_1}}} = \frac{n-1}{\sum\limits_{i \neq j} \frac{x_i}{1 + x_i}} = \frac{n-1}{n-1-\sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{1+x_i}}. \quad (\dagger)$$

На основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине следи

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{1 + x_i} \geqslant \frac{(n-1)^2}{\sum\limits_{i \neq j}(1 + x_i)} = \frac{(n-1)^2}{n - 1 + \sum\limits_{i \neq j} x_i} = \frac{(n-1)^2}{n - x_j}. \quad (\ddagger)$$

Из (†) и (‡) следи

$$\left(\prod_{i \neq j}\left(1 + \frac{1}{x_i}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \frac{n-1}{n-1-\frac{(n-1)^2}{n-x_j}} = \frac{n - x_j}{1 - x_j}.$$

Множењем последњих неједнакости за $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ добија се неједнакост из задатка. Једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$ (на основу услова једнакости у горе примењеним неједнакостима средина) (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М597).

Друго решење. Функција $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ је конвексна ($f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x^2} > 0$; наравно, рачун извода се може избећи), па по Јенсеновој неједнакости следи (за свако $j \in \{1, 2, \dots, n\}$)

$$\begin{aligned}\sum_{i \neq j} \ln\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) &\geqslant (n-1) \cdot \ln\left(1 + \frac{n-1}{\sum\limits_{i \neq j} x_i}\right) \\ &= (n-1) \cdot \ln\left(1 + \frac{n-1}{1-x_j}\right) = (n-1) \cdot \ln\left(\frac{n-x_j}{1-x_j}\right).\end{aligned}$$

Сабирањем претходних неједнакости за $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и скраћивањем са $n-1$ добија се

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{x_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{n-x_i}{1-x_i}\right),$$

а применом (расуће) функције e^x на последњу неједнакост и неједнакост из задатка. Једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$ ($f(x)$ је строго конвексна).

Напомена. Друго решење је симулација доказа *Караматине неједнакости*:

Нека је $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *конвексна функција и*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \succcurlyeq (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+)$*, тада*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)$$

($(x_1, x_2, \dots, x_n) \succcurlyeq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ (*мајорација*) означава да важи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n} y_i' \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} x_i' \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i' \quad \text{за свако} \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

где је $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ $((y_1', y_2', \dots, y_n'))$ n-торка која је добијена од n-торке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $((y_1, y_2, \dots, y_n))$ пермутацијом координата, тако да важи $x_1' \geqslant x_2' \geqslant \ldots \geqslant x_n' (y_1' \geqslant y_2' \geqslant \ldots \geqslant y_n')$).

Тврђење задатка непосредно следи из ове неједнакости примењене на функцију $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ и векторе $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, где је $y_i = \dfrac{1-x_i}{n-1}$.

Заиста, f је конвексна (видети друго решење задатка), а без умањења општости може се претпоставити да је $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Тада је (очигледно) $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$ и (за $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$)

$$k = k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = k \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} k x_i \leqslant k \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_1\right) = n \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i,$$

па је (за $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} y_{n-i+1} &= \frac{k - (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}{n-1} \\ &= x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \frac{k - n(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^{k} x_i.\end{aligned}$$

Како је и

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n-1} = 1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

следи $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succcurlyeq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Трећи разред, Б категорија

1. Одузимањем прве једначине од друге и четврте, односно додавањем на трећу, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & my & + & z & = & 1, \\ & & y & + & 2mz & = & 3, \\ & & 2y & + & 3z & = & 4. \end{array}$$

Одузимањем двоструке треће једначине (новодобијеног система) од четврте, односно одузимањем треће једначине помножене са m од друге једначине, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & & & (1-2m^2)z & = & 1-3m, \\ & & y & + & 2mz & = & 3, \\ & & & & (3-4m)z & = & -2. \end{array}$$

Из друге и четврте једначине последњег система следи $(3-4m)(1-3m) = (3-4m)(1-2m^2)z = -2(1-2m^2) \Rightarrow 0 = 8m^2 - 13m + 5 = (m-1)(8m-5)$.

Дакле:

1° ако је $m \notin \left\{\frac{5}{8}, 1\right\}$, систем нема решења;

2° ако је $m = 1$, систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & & - & z & = & -2, \\ & & y & + & 2z & = & 3, \\ & & & - & z & = & -2 \end{array}$$

и има јединствено ршење $(x, y, z) = (-3, -1, 2)$;

3° ако је $m = \dfrac{5}{8}$, систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0, \\ & & & & \dfrac{7}{32}z & = & -\dfrac{7}{8}, \\ & & y & + & \dfrac{5}{4}z & = & 3, \\ & & & & \dfrac{1}{2}z & = & -2 \end{array}$$

и има јединствено ршење $(x, y, z) = (12, 8, -4)$

(Тангента 46, стр. 39, Писмени задаци, задатак 5).

2. Нека су r, h и s, полупречник основе, висина и изводница, редом, те купе. Тада је површина основе купе једнака $r^2\pi$, а површина купе $r(r+s)\pi$, па из услова задатка следи да је $r(r+s)\pi = 4r^2\pi$, одакле је $s = 3r$.

Осни пресек ове купе је једнакокраки троугао чија је основа $2r$, висина h, а крак s, па по Питагориној теореми следи $r^2 + h^2 = s^2$, одакле је $r^2 + h^2 = 9r^2 \Leftrightarrow h^2 = 8r^2 \Leftrightarrow \dfrac{h}{r} = 2\sqrt{2}$ $(h, r > 0)$.

3. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

4. Видети решење петог задатка за други разред Б категорије.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је a основна ивица, а H висина пирамиде. Како је $V = B \cdot H$, следи $H = \dfrac{V}{a^2}$. Збир дужина свих ивица призме је $f(a) = 8a + 4H = 4 \cdot \left(2a + \dfrac{V}{a^2}\right)$ (за $a \in (0, \infty)$). За овакве a функција f је диференцијабилна и важи $f'(a) = 4 \cdot \left(2 - \dfrac{2V}{a^3}\right) = 8 \cdot \left(1 - \dfrac{V}{a^3}\right)$. Како је $f'(a) < 0$ за $a \in \left(0, \sqrt[3]{V}\right)$ (тј. на овом интервалу f опада), $f'(a) > 0$ за $a \in \left(\sqrt[3]{V}, \infty\right)$ (тј. на овом интервалу f расте), $f'(a) = 0$ за $a = \sqrt[3]{V}$ $(V > 0)$, следи да се у тачки $\sqrt[3]{V}$ достиже минимум функције f.

Ако је $a = \sqrt[3]{V}$, следи $H = \dfrac{V}{a^2} = \dfrac{a^3}{a^2} = a$, тј. у питању је коцка странице $\sqrt[3]{V}$, па је њена површина $P = 6a^2 = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \left(12\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \left(3^3 \cdot 2^3 \cdot 3\right)^{\frac{1}{3}} = 36\sqrt[3]{2}$ (Тангента 53, стр. 22, Наградни задаци, M743).

2. Нека је табла смештена у координатни систем, тако да је центар поља које је доњи-леви угао табле $(0, 0)$, а центар поља које је горњи-десни угао табле $(8, 8)$. Тада је центар сваког поља табле тачка чије су обе координате целобројне, па се поља табле могу поистоветити са одговарајућим тачкама скупа $\{(m,n) \mid m,n, \in \mathbb{N}_0, 0 \leqslant m,n \leqslant 7\}$.

Ако су (k,l) и (m,n) поља табле нека је (њихово „растојање”)

$$\operatorname{dist}[(k,l),(m,n)] = |k-m| + |l-n|.$$

Тада је $\operatorname{dist}[(0,0),(7,7)] = 14$; један потез скакача може смањити вредност претходне функције највише за 3, па следи да је $k \geqslant 5$.

Међутим, на стандардно обојеној шаховској табли (наизменично црно-бело), поља $(0,0)$ и $(7,7)$ су исте боје, а скакач у сваком потезу може прећи само на поље супротне боје, па је за тражено пребацивање неопходан паран број скокова. Следи $k \geqslant 6$.

	1						
		1					

ОП 09 4А 2-1

1		**1**					
	1		**2**				
1				**1**			
			1				
2		**1**		**1**			

ОП 09 4А 2-2

	2		**1**				
2		**4**		**3**			
	3		**2**		**3**		
1		**4**		**2**		**1**	
	8		**4**		**4**		
2		**8**		**3**		**2**	
	2		**1**		**2**		

ОП 09 4А 2-3

	2·2		**1·3**				
		4·4		**3·4**			
	3·1		**2·2**		**3·4**		
		4·3		**2·2**		**1·3**	
			4·3		**4·4**		
				3·1		**2·2**	

ОП 09 4А 2-4

Како низом потеза $(0,0) \to (1,2) \to (2,0) \to (3,2) \to (5,3) \to (6,5) \to (7,7)$ скакач прелази из $(0,0)$ у $(7,7)$, следи да је $k = 6$.

Нека је за свако поље познато на колико начина је могуће доћи до њега у n потеза (полазећи са $(0,0)$). За произвољно поље P, нека су сва поља са којих се у једном потезу може доћи у P „поља суседна са P”. Тада је број начина на који је могуће поставити скакача на поље

P након $n+1$ потеза једнак је збиру броја начина доласка на сва поља суседна са P након n потеза.

На тај начин је могуће формирати таблицу броја начина доласка у произвољно поље након n потеза (на сликама ОП 09 4А 2-(1-3) је приказана ова таблица за $n \in \{1,2,3\}$; уколико је тај број 0, поља таблица су празна).

Аналогна таблица се може направити за број начина доласка на произвољно поље у n потеза полазећи са поља $(7,7)$; због симетрије, та таблица за неко n се може добити и од претходне таблице (тј. таблице добијене полазећи са поља $(0,0)$) симетијом у односу на главну дијагоналу таблице (тј. уписивањем у поље (m,n) вредности која се налазила у пољу $(7-n, 7-m)$). Да би се у шест потеза дошло из $(0,0)$ у $(7,7)$, потребно је у три потеза доћи са $(0,0)$ до неког поља, а након тога у још три потеза са тог поља до $(7,7)$.

Следи да је тражени број збир бројева из таблице ОП 09 4А 2-4 (ако је на пољу уписано $k \cdot l$, то значи да се од $(0,0)$ до тог поља у три потеза може доћи на k начина, а од тог поља до $(7,7)$ у три потеза на l начина; ако је неки од ових бројева 0, поље таблице је остављено празно).

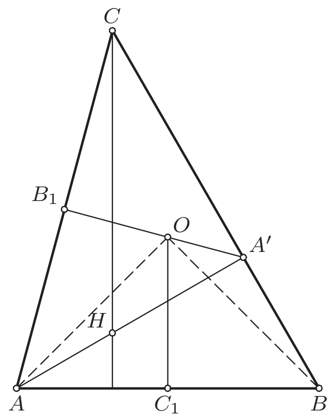
Дакле, најмањи број потеза који је потребан за тражено пребацивање је $k=6$ и то се може урадити на $4\cdot(4\cdot3+3\cdot1)+2\cdot(2\cdot2+4\cdot4+2\cdot2)=108$ начина.

3. Нека је A' подножје нормале из темена A троугла ABC, B_1 средиште странице AC, а C_1 средиште странице AB.

По условима задатка $\triangle AA'C$ је правоугли (са правим углом код темена A'), при чему је подножје висине из темена A' средиште странице AC, тј. овај троугао је и једнакокраки (тј. $\sphericalangle BCA = 45^\circ$).

Троугао OC_1B је правоугли и $\sphericalangle BOC_1 = \sphericalangle BCA = 45^\circ$ (централни и периферијски угао).

Такође, важи $CH = 2 \cdot OC_1$ (хомотетија чији је центар тачка описане кружнице $\triangle ABC$ дијаметрално супротна тачки C, и коефицијента 2, слика дуж OC_1 у CH).



ОП 09 4А 3

Дакле, $\dfrac{CH}{BO} = 2 \cdot \dfrac{CO_1}{BO} = \sqrt{2}$ (CO_1 и BO су катета и хипотенуза једнакокрако-правоуглог $\triangle BOC_1$) (Тангента 46, стр. 20, Наградни задаци, М593).

4. Видети решење трећег задатка за трећи разред А категорије.

5. Нека је $N \in \mathbb{N}$, q_1 такво да важи $a_n \equiv a_{n+q_1} \pmod N$ почев од неког n (по условима задатка такво q_1 постоји), q_2 такво да важи $a_n \equiv a_{n+q_2} \pmod{\varphi(N)}$ почев од неког n (по условима задатка такво q_2 постоји) и $p = \text{НЗС}(q_1, q_2)$. Довољно је показати да је $a_n^{a_n} \equiv a_{n+p}^{a_{n+p}} \pmod N$ (почев од неког n).

Како $q_1 \mid p$, следи $a_{n+p} \equiv a_n \pmod N$ (почев од неког n), тј. $a_{n+p}^{a_{n+p}} \equiv a_n^{a_{n+p}} \pmod N$, па следи да је довољно показати да $N \mid a_n^{a_{n+p}} - a_n^{a_n} = a_n^{a_n} \cdot \left(a_n^{a_{n+p}-a_n} - 1\right)$ (почев од неког n).

Нека је $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја N. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, почев од неког n важи $a_n \geqslant \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. За фиксно a_n са овим својством, постоји јединствено разлагање $N = N_1 \cdot N_2$, тако да је сваки прост фактор броја N_1 и прост фактор броја a_n и $(a_n, N_2) = 1$. Ако је p_i неки прост фактор броја N_1, следи да $p_i^{a_n} \mid a_n^{a_n}$, па и $p_i^{\alpha_i} \mid a_n^{a_n}$, одакле $N_1 \mid a_n^{a_n}$. Како је $(N_2, a_n) = 1$, следи $a_n^{\varphi(N_2)} \equiv 1 \pmod{N_2}$, па како $\varphi(N_2) \mid \varphi(N)$, $q_2 \mid p$ и $a_{n+q_2} \equiv a_n \pmod{\varphi(N)}$ (почев од неког n), следи $N_2 \mid \left(a_n^{a_{n+p}-a_n} - 1\right)$. Дакле, почев од неког n важи $N \mid a_n^{a_{n+p}} - a_n^{a_n}$.

Четврти разред, Б категорија

1. Како је

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ a-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ a & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & a & a \\ a-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2a + 4 = (-2)(a-2),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & a \\ a-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3),$$

за $a \notin \{2, 3\}$ важи $\Delta \neq 0$, па за овакве a систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(\frac{1}{a-3}, -\frac{2}{a-3}, 1\right).$$

Ако је $a = 3$, тада је $\Delta_x \neq 0$ и $\Delta = 0$, па у овом случају систем нема решења.

Ако је $a = 2$ систем постаје

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -1, \\ -4x & - & 2y & + & 2z & = & 2, \\ x & + & y & + & z & = & 2. \end{array}$$

Одузимањем двоструке треће једначине од прве, односно додавењем четвороструке треће другој, добија се еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & y & - & 3z & = & -5, \\ & & 2y & + & 6z & = & 10, \\ x & + & y & + & z & = & 2. \end{array}$$

односно (како су прва и друга једначина еквивалентне)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2, \\ & - & y & - & 3z & = & -5, \end{array}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = 5-3z$ и $x = 2-y-z = 2-(5-3z)-z = 2z-3$, па у овом случају систем има бесконачно много решења

$$\{(2z-3, 5-3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

(Тангента 42, стр. 44, Писмени задаци, задатак 5).

2. Како је површина паралелограма над векторима $\vec{x}$ и $\vec{y}$ једнака $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot |\sin\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})|$, $\vec{x} \times \vec{x} = 0$, $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ и како је (по условима задатка) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$, следи да је тражена површина једнака

$$\begin{aligned} |\vec{p} \times \vec{q}| &= \left|(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})\right| = \left|2\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{b}\right| \\ &= \left|7 \cdot \vec{b} \times \vec{a}\right| = 7 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot |\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| = 7 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

3. По условима задатка, бочна страна пирамиде је једнакокраки правоугли троугао, чија је хипотенуза дужине 2, па је површина сваке (од три) бочне стране једнака 1 (краци тог троугла су дужине $\sqrt{2}$, па је његова површина $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$). Основа пирамиде је једнакостранични троугао странице 2, па је његова површина $\dfrac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Дакле, површина пирамиде је $3 \cdot 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ (Тангента 53, стр. 38, Писмени задаци, задатак 2).

4. Израз $\log_2(x(1-x))$ је дефинисан ако и само ако је $x(1-x) > 0$, тј. ако и само ако је $x \in (0,1)$. Израз $-2 + \left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|$ је дефинисан ако и само ако је $x \neq 0$.

Дакле, једначина има смисла ако и само ако је $x \in (0,1)$. За такве x важи $x > 0$ и $1 - x > 0$, па, по неједнакости између аритметичке и геометријске средине, следи $x(1-x) \leqslant \left(\dfrac{x + (1-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, одакле је (функција $\log_2 x$ је растућа) $\log_2(x(1-x)) \leqslant \log_2 \frac{1}{4} = -2$. Притом једнакост важи ако и само ако је $x = 1-x$, тј. ако и само ако је $x = \frac{1}{2}$. Како је апсолутна вредност ненегативна, следи

$$-2 \geqslant \log_2(x(1-x)) = -2 + \left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \geqslant -2,$$

па у претходном низу на сваком месту мора важити једнакост. Следи да мора бити $x = \frac{1}{2}$.

Провером, следи да $x = \frac{1}{2}$ и јесте решење (Тангента 51, стр. 49, Писмени задаци, задатак 4).

5. Видети решење другог задатка за четврти разред А категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Први разред, А категорија

1. *Анализа.* Како је $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90^\circ$, следи да кружница над AB као пречником садржи M и N.

Конструкција. Ако су M и N симетричне у односу на p, нека је X произвољна тачка која припада p, а не припада MN. Нека су A и B пресечне тачке праве p и кружнице са центром у X која садржи M. Тачка C је пресечна тачка правих AN и BM (слика ОК 09 1А 1-4).

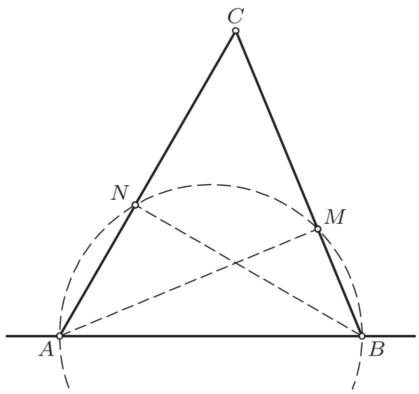
Ако MN није нормално на p, нека је X пресек симетрале дужи MN и праве p. Тачке A и B су пресечне тачке праве p и кружнице са центром у X која садржи M. Тачка C је пресечна тачка правих AN и BM (слике ОК 09 1А 1-(1-3)).

Доказ. По конструкцији тачке M и N припадају правама BC и AC, редом, а права AB се поклапа са p. Како је $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90^\circ$ (угао над пречником), следи да су M и N подножја нормала из A и B на BC и AC, редом.

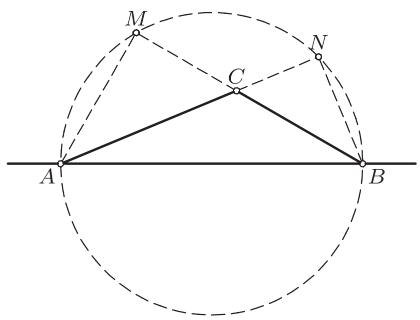
Дискусија. Средиште дужи MN не сме припадати p. У том случају би четвороугао $AMNB$ био паралелограм (дијагонале му се полове), тј. две странице $\triangle ABC$ би биле паралелне.

Ако је $MN \perp p$ и M и N нису симетричне у односу на p, тражени троугао не постоји (не постоје $A, B \in p$ тако да је $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BNA = 90^\circ$). Ако је $MN \perp p$ и M и N су симетричне у односу на p, конструкција је могућа за било које $X \in p$, тако да $X \notin MN$ ($X \in MN$ је немогуће по горњем коментару). Дакле, у овом случају постоји бесконачно много решења.

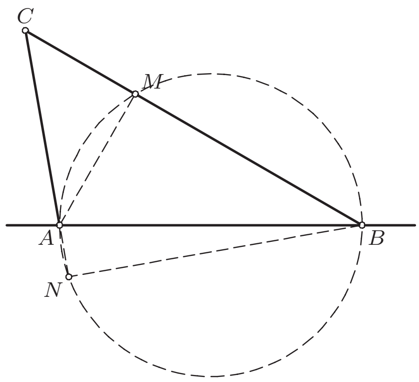
Ако није $MN \perp p$ и средиште дужи MN не припада p (иначе нема решења по горњем коментару), конструкција је коректно дефинисана. Тада постоји два решења задатка (кружница са центром у X која садржи M сече p у две тачке; обе могу бити тачка A (преостала је тачка B)) (Тангента 51, стр. 50, Писмени задаци, задатак 1).



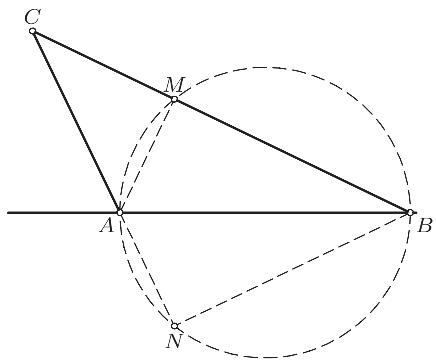
ОК 09 1А 1-1



ОК 09 1А 1-2



ОК 09 1А 1-3



ОК 09 1А 1-4

2. Из $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=0$ следи да је $pq+qr+rp=0$, па је $1=(p+q+r)^2=(p^2+q^2+r^2)+2(pq+qr+rp)$, одакле је $p^2+q^2+r^2=1$. Следи $(pa+qb+rc)^2+(qa+rb+pc)^2+(ra+pb+qc)^2=$

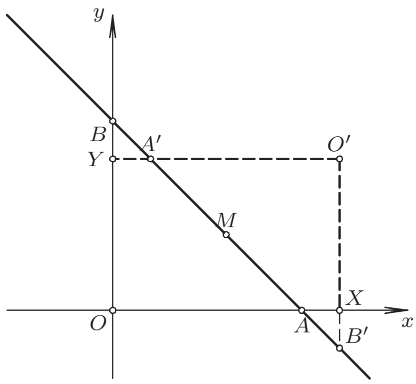
$$\begin{aligned} &= (p^2+q^2+r^2)(a^2+b^2+c^2)+2(pq+rq+pr)(ab+bc+ac) \\ &= 1\cdot(a^2+b^2+c^2)+0=a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

3. Нека је M произвољна тачка првог квадранта, m права која садржи M и сече позитивне делове координатних оса у тачкама A (x-осу) и B

(y-осу). Нека су O', A', B' тачке симетричне у односу на M са O, A, B, редом.

Следи $\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$. Нека су X и Y подножја нормала из O' на x и y осу, редом. Унија површи троуглова OAB и $O'A'B'$ садржи правогаоник $OXO'Y$, па је $2P(OAB) = P(OAB) + P(O'A'B') \geqslant P(OXO'Y)$; једнакост се достиже ако и само ако је $A \equiv X \equiv B'$ и $B \equiv Y \equiv A'$.

Дакле, тражена права је дијагонала XY ($M \in XY$) правоугаоника $OXO'Y$.



ОК 09 1А 3

4. Један такав број је $n = 1$. Нека је $n > 1$ неки број за који је тражено тврђење тачно, $S(k)$ збир цифара природног броја k и $x = \underbrace{11\ldots11}_{n}$, $y = \underbrace{11\ldots11}_{n-2}02$. Како је $S(x) = S(y) = n$ следи да $n \mid x$ (јер $n \mid S(x)$) и $n \mid y$ (јер $n \mid S(y)$), па $n \mid x - y = 9$. Отуда су једини бројеви који могу бити решења $n = 3$ и $n = 9$. Из критеријума за дељивост са 3 и 9 следи да је тврђење тачно за ове бројеве.

Дакле, тражени бројеви су 1, 3 и 9.

5. Један тим не може имати истовремено две карактеристичне боје, јер одевних предмета у преосталој боји има 8, што је мање од $2 \cdot 6$ (тј. играчи другог тима не би могли да се обуку).

Дакле, играчи једног тима морају носити свих 8 одевних предмета у својој карактеристичној боји, а њихова преостала 4 одевна предмета морају бити на четири различита играча, и то у боји која није карактеристична за други тим. То је изводљиво само ако у тиму два фудбалера имају и мајицу и шортс у карактеристичној боји, два само мајицу, а два само шортс.

Карактеристичне боје тимовима се могу доделити на $3 \cdot 2 = 6$ начина; играчи једног тима могу да се обуку на $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$ начина, и то независно од облачења другог тима. Дакле, укупан број различитих облачења је $6 \cdot 90^2 = 48\,600$.

Први разред, Б категорија

1. Како је $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{7} - 1 > 0$ и $2\sqrt{7} - 6 < 0$, следи

$$2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} + \sqrt{\left(2\sqrt{7} - 6\right)^2} = 2\sqrt{1 - 2\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{7} - 6\right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{7}-6\right)^2} \\ &= 2\cdot\left|\sqrt{7}-1\right| + \left|2\sqrt{7}-6\right| = 2\cdot\left(\sqrt{7}-1\right) + \left(6-2\sqrt{7}\right) = 4, \end{aligned}$$

тј. овај број је рационалан (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 5).

2. По неједнакости троугла је $BC > AB + AC$, одакле је $C - E - D - B$.

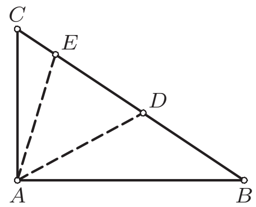
$\triangle ABE$ је једнакокрак, па је

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle BEA = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ABC}{2}.$$

$\triangle ADC$ је једнакокрак, па је

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC = 90^\circ - \frac{\sphericalangle BCA}{2}.$$

Коначно, из $\triangle ADE$ следи



ОК 09 1Б 2

$$\sphericalangle DAE = 180^\circ - \sphericalangle DEA - \sphericalangle ADE = \frac{\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA}{2} = 45^\circ.$$

3. Једначина $|x| = a$ има два решења ако је $a > 0$, једно ако је $a = 0$, а нема решења ако је $a < 0$. Следи, ако је $|y| > 2\,009$ једначина нема решења; ако је $|y| = 2\,009$, постоји тачно једно (и то цело) x које је решење једначине; ако је $|y| < 2\,009$, $y \in \mathbb{Z}$, постоји тачно два (и то цела) x која су решења једначине.

Дакле, укупан број решења ове једначине (у $\mathbb{Z}^2$) је $1{\cdot}2{+}2{\cdot}(2\cdot 2\,008+1) = 8\,036$.

4. Из формуле за површину троугла је $P = \frac{1}{2}\cdot ch = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)r$, а по неједнакости троугла $a + b > c$, па је

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+c} = \frac{1}{2}.$$

Како је $c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, следи $2c^2 \geqslant (a+b)^2$, тј. $a + b \leqslant c\sqrt{2}$, па је

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geqslant \frac{c}{c\left(1+\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2} - 1 > \frac{2}{5}.$$

5. Тражени број је једнак броју избора 10 карата (од 20), међу којима су тачно 3 даме. Седам карата од 16 (које нису даме) могу се изабрати на $\binom{16}{7}$ начина, а 3 (од 4) даме на $\binom{4}{3}$ начина (независно од претходног избора), па је тражени број $\binom{16}{7}\cdot\binom{4}{3} = 45\,760$ (Тангента 52, стр. 38, Писмени задаци, задатак 9).

Други разред, А категорија

1. Једначина има смисла за $x \geqslant 0$.
Како је $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, следи $\sqrt[3]{2+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} +$

$$\begin{aligned}
&+ \quad 3 \cdot \sqrt[3]{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} \cdot \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{x}}\right) = 1 \\
&\Rightarrow \quad 4 + 3 \cdot \sqrt[3]{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} \cdot 1 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{4-x} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow x = 5.
\end{aligned}$$

Провером се добија да $x = 5$ и јесте решење (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 4).

Напомена. Провера решења је неопходна да би решење било потпуно. Заиста, применом истог поступка на једначину $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1$ долази се до могућег решења $x = 0$. Међутим, ово није решење полазне једначине.

Друго решење. Једначина има смисла за $x \geqslant 0$. Нека је $u = \sqrt[3]{2+\sqrt{x}}$, $u = \sqrt[3]{2-\sqrt{x}}$. Тада је $u > 0, u+v = 1, u^3 + v^3 = 4$. Елиминисањем непознате v добија се $4 = u^3 + (1-u)^3 \Leftrightarrow u^2 - u - 1 = 0$, одакле је $u = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ или $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Како је $u > 0$, прва могућност отпада, па је $\sqrt{x} = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 2 = \dfrac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{8} - 2 = \sqrt{5}$, одакле је $x = 5$.

2. Једначина $\sin\varphi = a$ има решења ако и само ако је $a \in [-1, 1]$, па је довољно доказати да је $\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{n - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \in [-1, 1]$. Како за $x \in (0, \pi)$ важи $|\cos x| < 1$, следи $|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| = |\cos\alpha| \cdot |\cos\beta| \cdot |\cos\gamma| < 1$, одакле је $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma < 1 \leqslant n$, па је именилац посматраног разломка позитиван. Следи да је тврђење еквивалентно са

$$\pm\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant n. \qquad (\star)$$

Како је $\pm\sin\beta\sin\gamma \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot \left(\sin^2\beta + \sin^2\gamma\right)$ (пошто је $0 \leqslant (\sin\beta \mp \sin\gamma)^2$) и $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant |\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| = |\cos\alpha| \cdot |\cos\beta\cos\gamma| < 1 \cdot |\cos\beta\cos\gamma| \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot \left(\cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)$, следи $\pm\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sin^2\beta + \sin^2\gamma\right) + \dfrac{1}{2} \cdot \left(\cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) = 1 \leqslant n$, тј. $(\star)$.
Ако је n цео број, аналогно тврђење не важи. Заиста, за $n = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{4}$, вредност израза $\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{n - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ једнака је $-\sqrt{2}$, па не постоји тражено φ.

Напомена. Слично претходном решењу, може се доказати да за сваки негативан цео број n тврђење важи, тј. једина вредност целог броја n за коју тврђење није тачно је $n = 0$.

3. *Лема. Од свих троуглова уписаних у круг полупречника* R, *највећу површину има једнакостранични троугао.*

Доказ. Темена троугла највеће површине припадају кружници. Од свих троуглова уписаних у круг којима је једна страница фиксна тетива тог круга, највећу површину има једнакокраки троугао чија је основица та тетива, а угао при врху није туп (јер има највећу висину).

Дакле, довољно је да посматрати једнакокраке троуглове уписане у тај круг. Уколико је основица дужине x $(0 < x \leqslant 2R)$, одговарајућа висина је $R + \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4}}$, а површина $P = \dfrac{1}{2} \cdot \left(Rx + x \cdot \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4}}\right)$.

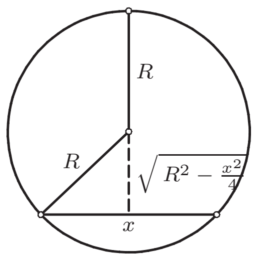
На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине је

$$\begin{aligned} 2P &= Rx + x \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{Rx}{2} + \frac{Rx}{2} + x \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} \\ &\leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \frac{R^2x^2}{4} + x^2 \cdot \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{6R^2x^2 - x^4}. \end{aligned}$$

Квадратна функција $t \to 6R^2t - t^2$ постиже максимум за $t = 3R^2$, одакле следи да се највећа вредност израза под претходним кореном постиже за $x = R\sqrt{3}$. Тада важи једнакост и у примењеној неједнакости средина.

Како се ова ситуација дешава у (и само у) једнакостраничном троуглу, следи тврђење леме.

Тврђење задатка следи из горње леме, пошто је површина једнакостраничног троугла уписаног у круг полупречника R једнака $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостранични).



ОК 09 2А 3

Напомена. Примена неједнакости средина се могла избећи доказивањем одговарајуће тригонометријске неједнакости или применом диференцијалног рачуна. Из горњег израза за површину троугла, следи да је функција $P(x)$ непрекидна на $(0, 2R]$ и диференцијабилна на $(0, 2R)$. На $(0, 2R)$ важи $2P(x)' = \frac{2R^2 - x^2 + R \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$, па је $P'(x) > 0$ за $x \in (0, R\sqrt{3})$ и

$P'(x) < 0$ за $x \in (R\sqrt{3}, 2R)$, тј. максимум функције $P : (0, 2R] \to \mathbb{R}$ се постиже за $x = R\sqrt{3}$.

4. p плавих куглица треба распоредити на $b+c+1$ места (пре прве беле или црвене куглице, између k-те и $(k+1)$-ве беле или црвене куглице (за $k \in \{1, 2, \ldots, b+c-1\}$), после последње беле или црвене куглице).

Ако је $p > b+c+1$ ово није могуће урадити (тј. у овом случају се у било ком распореду неке плаве куглице налазе једна поред друге), па је тражени број начина 0.

Ако је $p \leqslant b+c+1$, за распоред плавих куглица треба изабрати p од $b+c+1$ места, што се може урадити на $\binom{b+c+1}{p}$ начина; распореда белих и црвених има $\frac{(b+c)!}{b! \cdot c!}$ (пермутације са понављањем), тј. у овом случају тражени број начина је $\dbinom{b+c+1}{p} \cdot \dfrac{(b+c)!}{b! \cdot c!}$.

5. Ако је $n = 1$, следи $2^1 + 3^1 + 4^1 = 3^2$, тј. $n = 1$ је једно решење. Нека је $n \geqslant 2$ и важи $2^n + 3^n + 4^n = x^2$, за неко $x \in \mathbb{N}$. Како је број $2^n + 3^n + 4^n$ непаран, то је и број x непаран, па је $x^2 \equiv 1 \pmod 4$, а како је $2^n \equiv 4^n \equiv 0 \pmod 4$ за $n \geqslant 2$, следи $3^n \equiv 1 \pmod 4$, односно $(-1)^n \equiv 1 \pmod 4$. Следи да је n паран број. Нека је $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Једначина постаје $4^k + 9^k + (4^k)^2 = x^2$. Како је $4 \equiv 1 \pmod 3$ и $9 \equiv 0 \pmod 3$, следи $4^k + 9^k + (4^k)^2 \equiv 1 + 0 + 1 = 2 \pmod 3$, па је $x^2 \equiv 2 \pmod 3$, што је немогуће (квадрати целих бројева могу дати остатке 0 и 1 при дељењу са 3).

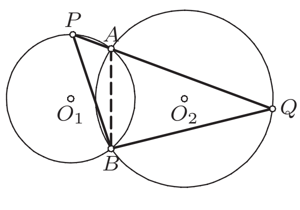
Дакле, једино решење је $n = 1$.

Други разред, Б категорија

1. **(а)** Како је $5 \equiv 1 \pmod 4$, $3 \equiv -1 \pmod 4$ и $357 \equiv 1 \pmod 4$, следи $\left(5^{41} + 2\right)\left(3^{105} - 1\right) + 357 \cdot \left(5^{70} + 1\right) \equiv \left(1^{41} + 2\right)\left((-1)^{105} - 1\right) + 1 \cdot \left(1^{70} + 1\right) = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = -4 \equiv 0 \pmod 4$.

(б) Како је $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$, следи $2^{60} = \left(2^6\right)^{10} \equiv (-1)^{10} = 1 \pmod{13}$. Како је $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$, следи $3^{70} = \left(3^3\right)^{23} \cdot 3 \equiv 1^{23} \cdot 3 = 3 \pmod{13}$. Дакле, $2^{60} + 3^{70} \equiv 1 + 3 = 4 \pmod{13}$, тј. овај број није дељив са 13 (Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци, задатак 3).

2. Углови $\sphericalangle APB$ и $\sphericalangle AQB$ су углови над тетивом AB у круговима k_1 и k_2, редом, па су константни и не зависе од избора тачака P и Q, тј. $\triangle BPQ$ има исте углове, без обзира на положај праве PQ.



ОК 09 2Б 2

Нека су P_1Q_1 и P_2Q_2 два могућа положаја праве PQ. Следи $\triangle BP_1Q_1 \sim$

$\triangle BP_2Q_2$, па важи $\dfrac{BP_1}{BQ_1} = \dfrac{BP_2}{BQ_2}$, односно однос $\dfrac{BP}{BQ}$ не зависи од положаја праве PQ.

3. Мора бити $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

Нека је $x_1 \leqslant x_2$. Одузмањем прве две једначине се добија $x_1 - x_2 = \sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}$, па је $x_3 \leqslant x_2$. Аналогно, из $x_2 - x_3 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_3}$, како је $x_3 \leqslant x_2$, следи $x_1 \geqslant x_3$. Коначно, из $x_1 - x_3 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$, како је $x_1 \leqslant x_2$, следи $x_1 \leqslant x_3$. Дакле, $x_1 = x_2 = x_3 (= t)$. Решавањем једначине $t + \sqrt{t} = 1$, добија се $\sqrt{t} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Како је $\sqrt{t} \geqslant 0$, једина могућност је $\sqrt{t} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, одакле је $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Случај $x_1 > x_2$ се разматра аналогно.

Дакле, једино решење овог система је $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

4. Полупречник r је већи од полупречника кружнице уписане у троугао чије су странице $a + b$, $b + c$, $c + a$. Нека је r_1 полупречник кружнице уписане у тај троугао и s његов полуобим. Следи $s = \dfrac{1}{2} \cdot ((a + b) + (b + c) + (c + a)) = a + b + c$, а по формулама за површину овог троугла следи

$$r_1 s = P = \sqrt{s\,(s - (a + b))\,(s - (b + c))\,(s - (c + a))} = \sqrt{abc(a + b + c)},$$

па је $r > r_1 = \dfrac{\sqrt{abc(a + b + c)}}{a + b + c} = \sqrt{\dfrac{abc}{a + b + c}}$.

5. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Како је $0 < \dfrac{\pi}{n} < \dfrac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} x > x$ за $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, следи $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n} > \dfrac{\pi}{n} > \dfrac{3}{n}$, одакле је

$$\sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}} = 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}} > 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{9}{n^2 + 9},$$

тј. $\sin \dfrac{\pi}{n} > \dfrac{3}{\sqrt{n^2 + 9}}$.

2. Нека је $\omega = \cos \dfrac{\pi}{3} + i \cdot \sin \dfrac{\pi}{3}$. Ако је троугао одређен тачкама a, b и c позитивно оријентисан, важи $c - a = (b - a) \cdot \omega$, а ако је негативно оријентисан важи $c - a = (b - a) \cdot \overline{\omega}$.

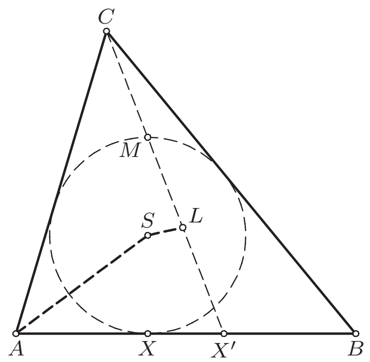
1° Ако је $a = 0$, мора бити $b \neq 0$, па је $z = -\dfrac{c}{b}$; у зависности оријентације, следи или $z = -\omega$ или $z = -\overline{\omega}$. Како је $|-\omega| = |-\overline{\omega}| = 1$, следи тврђење задатка.

2° Нека је $a \neq 0$. Ако је троугао одређен тачкама a, b и c позитивно оријентисан, како је $\omega^2 = \omega - 1$ ($\omega \neq -1$ је решење једначине $-1 = \omega^3$, па је $0 = 1 + \omega^3 = (1+\omega)(1 - \omega + \omega^2)$), следи

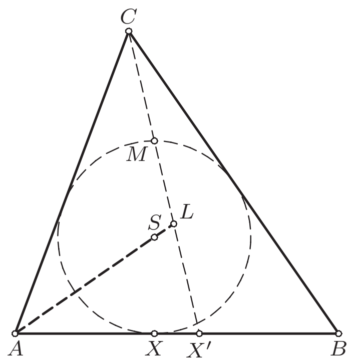
$$a(-\omega)^2 + b(-\omega) + c = a\omega^2 - b\omega + c = a\,(\omega - 1) - b\omega + c = c - a - (b-a)\cdot\omega = 0.$$

Дакле, $z = -\omega$ је решење једначине $az^2 + bz + c = 0$, па како је $|-\omega| = 1$, следи тврђење задатка. Ако је троугао негативно оријентисан, аналогно се показује да је $z = -\overline{\omega}$ једно решење једначине $az^2 + bz + c = 0$ и важи $|-\overline{\omega}| = 1$.

3. Тачка X' је додирна тачка спођа приписане кружнице која одговара темену C и странице AB, па је $X'B = AX$ и $AX' = BX$ (велики задатак; хомотетија са центром у C која слика уписани круг у спођа приписани круг који одговара темену C слика M у X'; веза $X'B = AX$ следи из рачуна тангентних дужи, јер је $2 \cdot X'B = 2 \cdot AX = AB + CA - BC$).



ОК 09 3А 3-1



ОК 09 3А 3-2

По Менелајевој теореми примењеној на $\triangle XX'M$ и тачке $A \in XX'$, $L \in X'M$, $S \in MX$ следи да су ове тачке колинеарне ако и само ако је $1 = \dfrac{XA}{AX'} \cdot \dfrac{X'L}{LM} \cdot \dfrac{MS}{SX} = \dfrac{AB + CA - BC}{AB + BC - CA} \cdot \dfrac{LX'}{LM} \cdot 1$, тј. ако и само ако је $\dfrac{CM}{MX'} = \dfrac{LX'}{LX' + LM} = \dfrac{1}{1 + \frac{LM}{LX'}} = \dfrac{1}{1 + \frac{AB+CA-BC}{AB+BC-CA}} = \dfrac{AB + BC - CA}{2 \cdot AB}$.

Нека је C' подножје висине из темена C, а r полупречник уписане кружнице $\triangle ABC$. Из израза за површину површину троугла ABC (P) следи $CC' \cdot AB = 2P = r \cdot (AB + BC + CA)$, одакле је $\dfrac{CC'}{2r} = \dfrac{AB + BC + CA}{2 \cdot AB}$.

Како је $\triangle CC'X' \sim \triangle MXX'$, следи $\dfrac{AB + BC + CA}{2 \cdot AB} = \dfrac{CC'}{2r} = \dfrac{CX'}{MX'} = 1 + \dfrac{CM}{MX'}$, одакле је $\dfrac{CM}{MX'} = \dfrac{-AB + BC + CA}{2 \cdot AB}$.

Из претходног следи да су тачке A, L, S колинеарне ако и само ако важи

$$\frac{AB + BC - CA}{2 \cdot AB} = \frac{CM}{MX'} = \frac{-AB + BC + CA}{2 \cdot AB},$$

тј. ако и само ако важи $AB = CA$ (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, M756).

4. Нека је d тражени број. Како $d \mid n^{13} - n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, специјално за $n = 2$ и $n = 3$ следи

$$
\begin{aligned}
d \quad &\mid \quad 2^{13} - 2 = 2 \cdot \big(2^{12} - 1\big) = 2 \cdot \big(2^6 - 1\big) \cdot \big(2^6 + 1\big) \\
&= \quad 2 \cdot 63 \cdot 65 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13, \\
d \quad &\mid \quad 3^{13} - 3 = 3 \cdot \big(3^{12} - 1\big) = 3 \cdot \big(3^6 - 1\big) \cdot \big(3^6 + 1\big) \\
&= \quad 3 \cdot 728 \cdot 730 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73,
\end{aligned}
$$

па је $d \leqslant \big(2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13, 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73\big) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,730$.

Са друге стране, по малој Фермаовој теореми, за свако $n \in \mathbb{N}$ број $n^{13} - n$ је дељив са 2, 3, 5, 7 и 13. Заиста, ако је p прост број, за сваки природан број n важи $n^p \equiv n \pmod{p}$ (последица мале Фермаове теореме), па се (применом за $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$) добија

$$
\begin{aligned}
n^{13} - n &= n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=0}^{11} n^k = \big(n^2 - n\big) \cdot \sum_{k=0}^{11} n^k &&\equiv 0 \pmod{2}, \\
n^{13} - n &= n \cdot \big(n^2 - 1\big) \cdot \sum_{k=0}^{5} n^{2k} = \big(n^3 - n\big) \cdot \sum_{k=0}^{5} n^{2k} &&\equiv 0 \pmod{3}, \\
n^{13} - n &= n \cdot \big(n^4 - 1\big) \cdot \sum_{k=0}^{2} n^{4k} = \big(n^5 - n\big) \cdot \sum_{k=0}^{2} n^{4k} &&\equiv 0 \pmod{5}, \\
n^{13} - n &= n \cdot \big(n^6 - 1\big) \cdot \big(n^6 + 1\big) = \big(n^7 - n\big) \cdot \big(n^6 + 1\big) &&\equiv 0 \pmod{7}, \\
n^{13} - n &\equiv &&\ 0 \pmod{13}.
\end{aligned}
$$

Дакле, тражени број је $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,730$.

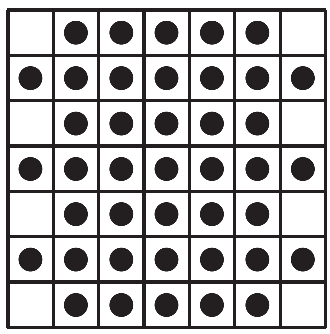
5. На таблу се може сместити 41 ловац, тако да је испуњен услов задатка (слика ОК 09 3А 5).

Нека је конфигурација која испуњава услове задатка *допустива*.

Лема. Не постоји допустива конфигурација у којој је број ловаца већи од 41.

Доказ. Треба доказати да је бар 8 поља празно (тј. на њима се не налази ловац).

Ако се на неком угаоном пољу налази ловац, тада се на дијагонали на којој се налази не сме налазити више ловаца, тј. има бар 6 празних поља.



ОК 09 3А 5

На другој дијагонали дужине 7 су или празна угаона поља (дакле још 2) или, аналогно, ако је ловац на угаоном пољу, осталих 6 је празно.

Како је за ове две дијагонале заједничко само једно поље, следи да и у овом случају има бар 8 празних поља.

Ако су угаона поља празна, треба доказати да постоји бар још 4 празна поља. Ако је нека од дијагонала дужине 7 у потпуности празна, то је обезбеђено. Иначе, на свакој од дијагонала дужине 7 постоји бар 2 ловца, па на свакој од ових дијагонала постоје и *крајњи* ловци, тј. ловци који на дијагонали на којој се налазе нападају угаоно поље. Крајњи ловац у овом случају мора нападати тачно 2 ловца (не може 0, јер већ напада једног; не може 4, јер је крајњи), па је он крајњи и на другој дијагонали на којој се налази.

1° Уколико се крајњи ловац налази и пољу које је заједничко за дијагонале дужине 7 (*централно поље*), празна су по три поља на обе дијагонале на којима се налази (тада он напада 2 угаона поља), као и преостала 2 угаона поља. Дакле, празно је бар 8 поља.

2° Уколико се ловац налази на пољу које има заједничко теме са угаоним пољем, празно је једно од поља на другој дијагонали на којој се налази (нека је ово поље *додељено* том ловцу). Ако је ловац на пољу које има заједничко теме са централним пољем, поред угаоног поља које му одговара, празно је и поље које се налази између тог угаоног поља и поља на коме се ловац налази (нека је ово поље *додељено* том ловцу). Како су поља која су додељена ловцима различита (споредне дијагонале дужине 2 немају заједничких поља), следи да и у овој ситуацији постоји бар 8 празних поља.

Из претходне леме следи да не постоји допустива конфигурација у којој је број ловаца већи од 41, па је одговор на питање задатка 41.

Трећи разред, Б категорија

1. Како $\vec{x}$ припада равни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, он је ортогоналан на $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,3,-2)$ (i, j, k су јединични вектори x, y и z осе, редом). Нека је $\vec{x} = (k,l,m)$. Из $\vec{a}\cdot\vec{x} = 7$, $\vec{b}\cdot\vec{x} = 0$ и $(1,3,-2)\cdot\vec{x} = 0$ се добија

$$\begin{array}{rcrcrcl} -k & + & l & + & m & = & 7, \\ 2k & & & + & m & = & 0, \\ k & + & 3l & - & 2m & = & 0. \end{array}$$

Овај систем има јединствено решење $(k,l,m) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$, тј. тражени вектор постоји и једнак је $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 2).

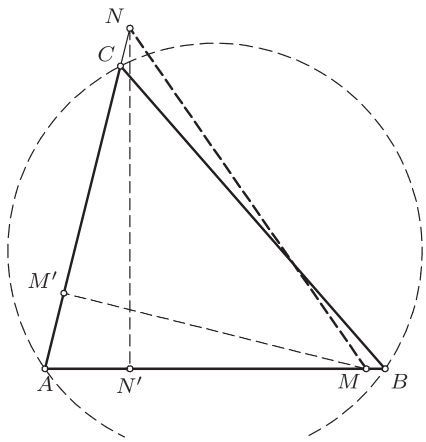
2. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$ и нека су M' и N' пројекције тачака M и N на праве AC и AB, редом.

Тада је

$$AM = \frac{MM'}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\alpha} \text{ и } AN = \frac{NN'}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\alpha},$$

па је $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AC}{AB}$, тј. троуглови ABC и AMN су слични са коефицијентом сличности $\dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Следи $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, па је $MN = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$.



ОК 09 3Б 2

3. Једначина $2^x = a$ има решења ако и само ако је $a > 0$, па је захтев задатка еквивалентан са одређивањем свих p за које једначина $(p-1)t^2 - 4\cdot t + (p+2) = 0$ има бар једно позививно решење. Ако је $p = 1$, ова једначина је линеарна и њено решење је $t = \dfrac{3}{4} > 0$. Ако је $p \neq 1$, ова једначина је квадратна и њена дискриминанта је $16 - 4\cdot(p-1)(p+2) = 4\cdot(2-p)(p+3)$. Следи, ако је $p \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$, ова једначина нема решења.

1° Ако је $p \in (1, 2\,]$, тада је $p - 1 > 0$, па једначина има бар једно позитивно решење ако и само ако је $\dfrac{2 + \sqrt{(2-p)(p+3)}}{p-1} > 0 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{(2-p)(p+3)} > 0$, што је тачно.

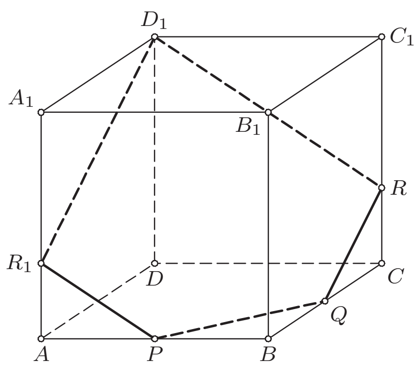
2° Ако је $p \in [\,-3, 1)$, тада је $p - 1 < 0$, па једначина има бар једно позитивно решење ако и само ако је $\dfrac{2 - \sqrt{(2-p)(p+3)}}{p-1} > 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{(2-p)(p+3)} < 0 \Leftrightarrow 4 < (2-p)(p+3) \Leftrightarrow (p-1)(p+2) < 0$, што је тачно ако је $p \in (-2, 1)$.

Дакле, полазна једначина има бар једно решење ако и само ако је $p \in (-2,1) \cup \{1\} \cup (1,2] = (-2,2]$ (Тангента 51, стр. 49, Писмени задаци, задатак 1).

4. Нека је $a = 1$ и нека је коцка смештена у координатни систем, тако да су $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ јединични вектори x, y и z осе, редом. У овом координатном систему је $P\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $Q\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $R\left(1, 1, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$, па је раван која садржи тачке P, Q и R $2x - 2y + 3z = 1$. Ова раван садржи тачке $R_1\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$ и $D_1(0,1,1)$, па како је пресек две непаралелне равни права, следи да је пресечна фигура коцке и равни PQR петоугао $PQRD_1R_1$.

Како је петоугао симетричан у односу на раван која садржи тачке B, B_1, D, D_1, следи да је његов обим $O = |\overrightarrow{PQ}| + 2 \cdot |\overrightarrow{QR}| + 2 \cdot |\overrightarrow{RD_1}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0} + 2 \cdot \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} + 2 \cdot \sqrt{1 + 0 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{13}.$

Ако је φ угао између равни PQR и xy-равни, тада је $\cos\varphi = \frac{(0,0,1) \cdot (2,-2,3)}{\|(0,0,1)\| \cdot \|(2,-2,3)\|} = \frac{3}{\sqrt{17}}$. Ако су P и P' површина неке фигуре и њене пројекције на неку раван, редом, и притом φ угао између равни у којој се налази фигура и равни у коју се пројектује, тада је $\frac{P}{P'} = \frac{1}{\cos\varphi}$. Како се петоугао из задатка пројекцијом на xy-раван пројектује у петоугао $APQCD$ и важи $P(APQCD) = 1 - P(\triangle PBQ) = \frac{7}{8}$, следи да је $P(APQCD) = \frac{\frac{7}{8}}{\cos\varphi} = \frac{7\sqrt{17}}{24}$.



ОК 09 3Б 4

Хомотетија са центром у A и коефицијентом a слика јединичну коцку у коцку ивице a. Како је однос дужина слике и оригинала једнак коефицијенту хомотетије, а однос површина слике и оригинала једнак квадрату коефицијента хомотетије, следи да је обим петоугла $APQCD$ једнак $a \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{13}\right)$, а површина $a^2 \cdot \dfrac{7\sqrt{17}}{24}$.

5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $g(x) = 2e^y - y^3 - 4$. Функција g је добро дефинисана и бесконачно пута диференцијабилна на $[2, \infty)$. Притом је $g'(y) = 2e^y - 3y^2$, $g''(y) = 2e^y - 6y$, $g'''(y) = 2e^y - 6$. Користећи $e^2 > 6$, редом следи:

- $g'''(y) \geqslant 2e^2 - 6 > 0$, тј. функција g'' је растућа на $[2, \infty)$;
- $g''(2) \geqslant 2e^2 - 12 > 0$; како је g'' је растућа на $[2, \infty)$, следи да је $g''(y) > 0$ за $y \in [2, \infty)$, па је функција g' растућа на $[2, \infty)$;
- $g'(2) \geqslant 2e^2 - 12 > 0$; како је g' је растућа на $[2, \infty)$, следи да је $g'(y) > 0$ за $y \in [2, \infty)$, па је функција g растућа на $[2, \infty)$;
- $g(2) \geqslant 2e^2 - 12 > 0$; како је g је растућа на $[2, \infty)$, следи да је $g(y) > 0$ за $y \in [2, \infty)$. Одавде се непосредно добија тврђење првог дела задатка.

Функција f је коректно дефинисана и два пута диференцијабилна на $(0, \infty)$, па је за други део задатка довољно показати да је $f''(x) > 0$ (за $x \in (0, \infty)$). На $(0, \infty)$ је $f'(x) = \dfrac{e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{e^{x+\frac{1}{x}} - 1}$ и $f''(x) =$

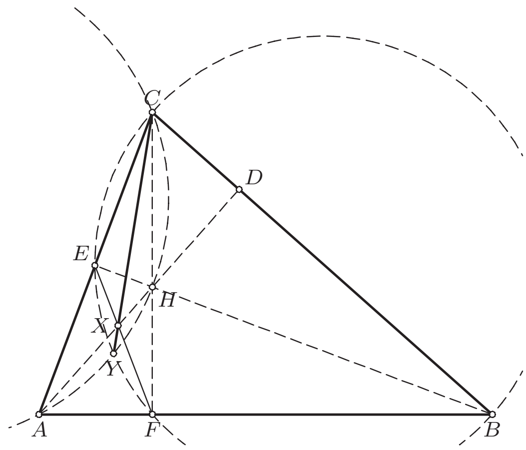
$$= \frac{\left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3}\right] \cdot \left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right) - \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$$

$$= \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \cdot \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{2}{x^3}\right.$$

$$\left. - \; e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2\right] = \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} \cdot \left[e^{x+\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} - 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right].$$

Како је $\dfrac{e^{x+\frac{1}{x}}}{\left(e^{x+\frac{1}{x}} - 1\right)^2} > 0$, довољно је доказати да је израз у последњој загради позитиван. Како је $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ за $x \in (0, \infty)$, користећи неједнакост првог дела задатка, последње следи из $e^{x+\frac{1}{x}}\cdot\frac{2}{x^3}-1+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}>\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+4\right]\cdot\frac{1}{x^3}-1+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}=\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}>0$.

2. Права CY је радикална оса описаних кругова $\triangle AHC$ и $\triangle EBC$, па је довољно доказати да X има исту потенцију у односу на ове кругове. Потенција тачке X односу на круг описан око $\triangle AHC$ је $XA\cdot XH$, а у односу на круг описан око $\triangle BCE$ је $XE\cdot XF$ (круг описан око $\triangle BCE$ је круг над пречником BC и садржи тачку F, јер је $\sphericalangle BEC=\sphericalangle BFC=90^\circ$). Како је четвороугао $AFHE$ тетиван ($\sphericalangle AFH=\sphericalangle HEA=90^\circ$), из потенције тачке X у односу на описани круг овог четвороугла, следи $XE\cdot XF=XA\cdot XH$ (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, М754).



ОК 09 4А 2

Друго решење. Нека је $\mathcal{I}$ инверзија са центром у C и полупречником $\sqrt{CA\cdot CE}=\sqrt{CD\cdot CB}$ (јер је четвороугао $ABDE$ тетиван ($\sphericalangle BEA=\sphericalangle BDA=90^\circ$), а производ под кореном је потенција тачке C у односу на описани круг четвороугла $ABDE$). Како је и четвороугао $AFHE$ тетиван ($\sphericalangle AFH=\sphericalangle HEA=90^\circ$), следи $CE\cdot CA=CF\cdot CH$, па је $\mathcal{I}(A)=E$, $\mathcal{I}(B)=D$, $\mathcal{I}(F)=H$. Следи да $\mathcal{I}$ слика праву EF у описани круг $\triangle AHC$, а праву AH у описани круг $\triangle CEF$ (односно описани круг $\triangle CEB$).

Дакле, тачка X (пресек правих EF и AH) са $\mathcal{I}$ се слика у Y (пресек одговарајућих кругова), па су тачке X, Y и центар инверзије (C) колинеарне.

3. Треба одредити остатак броја $x=2^{2^p}+1$ при дељењу 100, тј. при дељењу са 4 и при дељењу са 25. Како је $2^p>1$, следи $4\mid 2^{2^p}$, па је $x\equiv 1 \pmod 4$.
Ако је $p>2$ прост број, он је непаран. Нека је $p=2k+1$ ($k\in\mathbb{N}$). Следи $2^p=2^{2k+1}\equiv 2\cdot 4^k\equiv 2\cdot(-1)^k \pmod 5$, па је $2^p\equiv 2 \pmod 5$ ако

је k парно, односно $2^p \equiv 3 \pmod 5$ ако је k непарно. Такође је $2^p \equiv 0 \pmod 4$, па је или $2^p \equiv 12 \pmod{20}$ или $2^p \equiv 8 \pmod{20}$ (по кинеској теореми о остацима, претходни системи једначина имају јединствено решење у систему остатака по модулу 20).

На основу Ојлерове теореме је $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ (важи $(2, 25) = 1$), па је

$$\begin{aligned} \text{или } x &\equiv 2^{2^p} + 1 \equiv 2^{12} + 1 = 4\,097 \equiv 22 \pmod{25} \\ \text{или } x &\equiv 2^{2^p} + 1 \equiv 2^8 + 1 = 257 \equiv 7 \pmod{25}. \end{aligned}$$

Пошто је и $x \equiv 1 \pmod 4$, ако је $p > 2$ важи или $x \equiv 97 \pmod{100}$ или $x \equiv 57 \pmod{100}$ (по кинеској теореми о остацима, претходни системи једначина имају јединствено решење у систему остатака по модулу 100).

Дакле, ако је p непаран прост број, остатак при дељењу x са 100 једнак је или 57 или 97 или 17 (ово у случају $p = 2$), одакле се добија одговор на питање задатка.

4. Нека је $p(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ ($k = \deg p$). Из услова је $p(x) = p(\varepsilon x) = p(\varepsilon^2 x)$ (за свако $x \in \mathbb{C}$), па је

$$p(x) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{k} a_n x^n (1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n}) = \sum_{\substack{3|n \\ 0 \leqslant n \leqslant k}} a_n x^n$$

(јер је $1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} = 0$ ако $3 \nmid n$, односно $1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} = 3$ ако $3 \mid n$).

За целе m, n и $k \in \mathbb{N}_0$ важи $m^3 - n^3 \mid m^{3k} - n^{3k}$, па следи $m^3 - n^3 \mid p(m) - p(n)$, одакле $2^3 - 1^3 = 7 \mid p(2) - p(1) = 8$, што је немогуће.

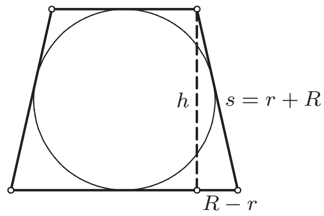
Дакле, не постоји полином са наведеним особинама.

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинисана са $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и важи $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$, па строго расте на $(-\infty, -1)$ и на $(3, \infty)$, а строго опада на $(-1, 3)$. На сваком интервалу строге монотоности f може узимати фиксну вредност највише једном, па је број решења једначине $f(x) = a$ највише 3 и једнак је 3 ако ова једначина има по једно решење на сваком од интервала монотоности. Како је $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 5$, $f(3) = -27$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, следи да је $f(-\infty, -1) = (-\infty, 5)$, $f(-1, 3) = (-27, 5)$, $f(3, \infty) = (-27, \infty)$, па једначина $f(x) = a$ има три различита решења ако и само ако је $a \in (-27, 5)$ (Тангента 52, стр. 44, Писмени задаци, задатак 1).

2. Нека је r полупречник мање, а R поупречник веће основице купе и $\alpha = \dfrac{r}{R}$. Нека је s изводница, а h висина купе. Осни пресек купе је једнакокраки трапез у који се може уписати кружница. Како су краци тог трапеза s, а дужине основица $2r$ и $2R$, следи $2s = 2r + 2R$, тј. $s = r + R$.



ОК 09 4Б 2

Из податка о површини омотача следи $4(R^2 - r^2)\pi = (R+r)s\pi = (R+r)^2\pi$, одакле је $4(R-r) = R + r$, тј. $\alpha = \dfrac{3}{5}$. Из Питагорине теореме је $h^2 = s^2 - (R-r)^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4rR = 4R^2\alpha$.

Полупречник лопте уписане у купу једнак је половини висине купе (трапеза), па је њена запремина $V_L = \dfrac{4}{3} \cdot \left(R\sqrt{\alpha}\right)^3 \pi = \dfrac{4R^3\pi}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}$. Запремина купе је $V_K = \dfrac{h\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \dfrac{2R^3\pi}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)$.

Коначно, $\dfrac{V_L}{V_K} = \dfrac{\dfrac{4R^3\pi}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{2R^3\pi}{3} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2)} = \dfrac{2\alpha}{1 + \alpha + \alpha^2} = \dfrac{30}{49}$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 1).

3. Из везе којом је дефинисан низ се добија $x_4 = 2$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$, $x_7 = 3$, $x_8 = 2$. Индукцијом је $x_{n+4} = x_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Заиста, база индукције је садржана у горњам рачуну. Нека је тврђење тачно за све чланове низа чији је индекс не већи од $n + 4$ $(n \geqslant 3)$. Тада је $x_{n+5} = x_{n+4} - x_{n+3} + x_{n+2} = x_n - x_{n-1} + x_{n-2} = x_{n+1}$. Дакле, важи $x_{2k} = 2$ за свако $k \in \mathbb{N}$; $x_{4k+1} = 1$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$; $x_{4k+3} = 3$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$.

Ред из задатка је ред са позитивним члановима, па је могуће пермутовати његове чланове. Како је $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ за $|q| < 1$ (збир геометријске прогресије), следи

$$\begin{aligned}
S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} &= 1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+3}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{4k+1}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^4}} + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{81}{80} + \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{7}{10}\,.
\end{aligned}$$

4. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.

5. Ако је $a = 0$, за свако $x > 0$, $x \neq 1$ важи $\log_x x^2 = 2$, па је (у овом случају) $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ скуп решења неједначине (и он је бесконачан).

Нека је $a \neq 0$. Неједначина има смисла за $x \in (-a, 1-a) \cup (1-a, \infty)$.

1° Ако је $x \in (-a, 1-a)$, тада је $0 < x + a < 1$, а полазна неједначина је еквивалентна са $x^2 + a^2 \leqslant (x+a)^2$, односно са $0 \leqslant ax$. Ако је $a > 0$ решења су $x \in [\,0,\infty) \cap (-a, 1-a)$, па за $1 - a > 0$ неједначина има бесконачно много решења, док за $1 - a \leqslant 0$ нема решења. Ако је $a < 0$ решења су $x \in (-\infty, 0\,] \cap (-a, 1-a) = \emptyset$, па за овакве вредности параметра a нема решења.

2° Ако је $x \in (1-a, \infty)$, тада је $1 < x + a$, а полазна неједначина је еквивалентна са $x^2 + a^2 \geqslant (x+a)^2$, односно са $0 \geqslant ax$. Ако је $a > 0$ решења су $x \in (-\infty, 0\,] \cap (1-a, \infty)$, па за $1 - a < 0$ неједначина има бесконачно много решења, док за $1 - a \geqslant 0$ нема решења. Ако је $a < 0$ решења су $x \in [\,0,\infty) \cap (1-a, +\infty) = (1-a, \infty)$ (тј. у овом случају има бесконачно много решења).

Из 1° следи да полазна неједначина има бесконачно много решења ако је $a \in (0,1)$. Из 2° следи да полазна неједначина има бесконачно много решења ако је $a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Из 1° и 2° следи да полазна неједначина нема решења ако је $a = 1$.

Дакле, јединствена вредност параметра a за коју полазна неједначина има коначан скуп решења је $a = 1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.03.2009.

Први разред, А категорија

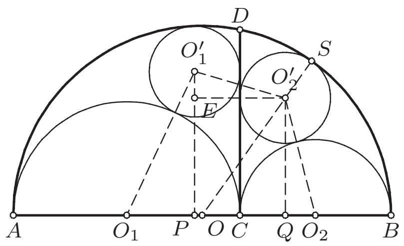
1. Нека је $t = x + \frac{1}{x}$. Како је $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$, следи да је $f(t) = t^2 - 2$ за свако $t > 0$ које се може представити у облику $t = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$. Како је $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2-4}{4}$, следи да се позитивни бројеви $t < 2$ не могу представити у траженом облику, док се остали позитивни бројеви ($t \geqslant 2$) могу представити (на пример за $x = \frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$).

Дакле, веза из задатка одређује f само за $t \geqslant 2$, па је $f(t) = t^2 - 2$ за $t \geqslant 2$, док за $0 < t < 2$ функција може бити произвољна, тј. постоји бесконачно много функција које задовољавају услов задатка.

2. Нека су O, O_1, O_2, O_1', O_2' и $r_0, r_1, r_2, r_1', r_2'$, редом, центри и полупречници кругова $k_0, k_{01}, k_{02}, k_1, k_2$. Нека су P и Q пројекције O_1' и O_2' на AB, редом. Важи $r_0 = \frac{AB}{2}$, $r_1 = \frac{AC}{2}$ и $r_2 = \frac{CB}{2}$.

Без умањења општости, нека је $AC > BC$. Како се k_{02} и k_2 додирују, следи $O_2O_2' = r_2' + r_2$. Како је и $QO_2 = CO_2 - CQ = r_2 - r_2'$ (важи $C - Q - O_2$), из правоуглог $\triangle O_2'QO_2$ следи

$$O_2'Q^2 = O_2'O_2^2 - QO_2^2 = (r_2' + r_2)^2 - (r_2 - r_2')^2 = 4r_2'r_2. \qquad (\spadesuit)$$



ДР 09 1А 2

Нека је S тачка додира кружница k_0 и k_{02}. Тада је $OO_2' = OS - O_2'S = r_0 - r_2'$ и $OQ = OB - BC + CQ = r_0 - 2r_2 + r_2'$ (важи $O - C - Q - B$). Из правоуглог $\triangle O_2'OQ$ следи

$$O_2'Q^2 = O_2'O^2 - OQ^2 = (r_0 - r_2')^2 - (r_0 - 2r_2 + r_2')^2 . \qquad (\clubsuit)$$

Из $r_0 = r_1 + r_2$, ($\spadesuit$) и ($\clubsuit$) следи $r_2' = r_2 - \dfrac{r_2^2}{r_0} = \dfrac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$. Слично је $r_1' = \dfrac{r_1r_2}{r_1 + r_2} = r_2'$. Нека је $r = r_1' = r_2'$. Из ($\spadesuit$) је $O_2'Q = 2\sqrt{rr_2}$ и $O_1'P = 2\sqrt{rr_1}$.

Нека је E подножје нормале из O_2' на $O_1'P$. Тада је $O_2'E = PQ = 2r$ и $O_1'E = O_1'P - O_2'Q$. Из правоуглог $\triangle O_1'EO_2'$, како је $r(r_1 + r_2) = r_1r_2$, следи

$$\begin{aligned} {O_1'O_2'}^2 &= O_1'E^2 + O_2'E^2 = (O_1'P - O_2'Q)^2 + 4r^2 \\ &= 4r(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1r_2}) + 4r^2 \\ &= 4r_1r_2 - 8r\sqrt{r_1r_2} + 4r^2 = 4\left(\sqrt{r_1r_2} - r\right)^2 . \end{aligned}$$

Како је $r < r_1, r_2$, следи $O_1'O_2' = 2\left(\sqrt{r_1r_2} - r\right)$, па је пречник најмањег круга који садржи и додирује кругове k_1 и k_2 једнак $O_1'O_2' + 2r = 2\sqrt{r_1r_2}$. Са друге стране, из потенције тачке D у односу на круг k_0 следи $CD^2 = AC \cdot CB = 4r_1r_2$, па је $CD = 2\sqrt{r_1r_2}$, одакле следи тврђење задатка.

3. Нека је сваком од уочених лукова придружен кружни одсечак ограничен тим луком и тетивом која спаја његове крајње тачке. По условима задатка и пресек свака три оваква одсечка је непразан. Како су одсечци конвексне фигуре, постоји тачка (нека је то S) која је садржана у сваком одсечку (ово тврђење је познато и као Хелијева теорема). Како су дужине уочених лукова мање од полуобима кружнице, ниједан од њих не садржи центар кружнице O. Нека су пресечне тачке праве OS и кружнице A и B, тако да је $B-O-S$.

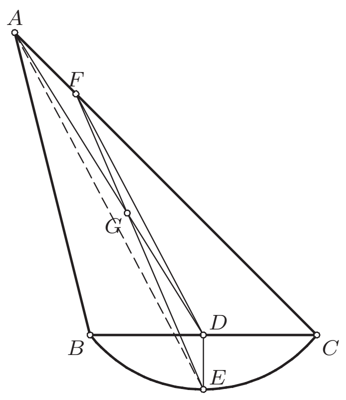
Тада тачка A припада свм уоченим луковима; ако би неки од лукова садржао тачку B његова дужина би била не мања од полуобима кружнице. Следи да тачка B не припада ниједном од уочених лукова.

4. *Анализа.* Нека су D и E средишта дужи BC и лука $\widehat{BC}$. Нека је F тачка дужи AC, тако да је EF тражена права. Нека је G пресек правих AD и EF. Изломљена линија ADE дели фигуру на два по површини једнака дела, па су $\triangle AGF$ и $\triangle GED$ једнаки по површини. Следи да су по површини једнаки и $\triangle AEF$ и $\triangle AED$. Како је AE њихова заједничка страница, следи да су једнаке висине које одговарају страници AE, тј. мора бити $DF \parallel AE$.

Конструкција. Нека су D и E средишта дужи BC и лука $\widehat{BC}$. Нека је F тачка пресека праве AC и праве која садржи тачку D, а паралелна је са AE. Тражена права је EF.

Доказ. Следи непосредно из анализе.

Дискусија. Како је захтев задатка конструкција бар једне праве, дискусија је непотребна.



ДР 09 1А 4-2

5. Нека је $k \in \mathbb{N}$ и $x = 2 \cdot 10^k - 1$. Како је

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(2 \cdot 10^k - 1\right)^2 = 4 \cdot 10^{2k} - 4 \cdot 10^k + 1 \\ &= 4\underbrace{00\ldots0}_{2k} - 4\underbrace{00\ldots0}_{k} + 1 = 3\underbrace{99\ldots9}_{k-1}6\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1, \end{aligned}$$

збир цифара броја x^2 једнак је $3+6+1+(k-1)\cdot 9 = 9k+1$. Дакле, сваки број облика $9k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ једнак је збиру цифара неког квадрата, па је такав и 2009^{2008}, јер је $2009^{2008} \equiv 1^{2008} = 1 \pmod 9$.

Друго решење. Нека је $k \in \mathbb{N}$ и $x = \underbrace{33\ldots3}_{k-1}2$. Како је

$$\begin{aligned} x^2 &= \underbrace{33\ldots3}_{k-1}2^2 = \left(\frac{10^k-4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\left(10^{2k} - 8\cdot 10^k + 16\right) \\ &= \frac{1}{9}\cdot\left(10^{2k}-1\right) - 8\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(10^k-1\right) + 1 \\ &= \underbrace{11\ldots1}_{2k} - \underbrace{88\ldots8}_{k} + 1 = \underbrace{11\ldots1}_{k-1}0\underbrace{22\ldots2}_{k-1}4, \end{aligned}$$

збир цифара броја x^2 једнак је $(k-1)\cdot 1 + (k-1)\cdot 2 + 4 = 3k+1$. Дакле, сваки број облика $9k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) једнак је збиру цифара неког квадрата, па је такав и 2009^{2008}, јер је $2009^{2008} \equiv 1^{2008} = 1 \pmod 3$.

Први разред, Б категорија

1. Како је $5^2 = 25 \equiv -1 \pmod{13}$, $4^3 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$ и $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$, следи $5^{102} + 4^{99} + 3^{100} = \left(5^2\right)^{51} + \left(4^3\right)^{33} + 3\cdot\left(3^3\right)^{33} \equiv (-1)^{51} + (-1)^{33} + 3\cdot 1^{33} = -1-1+3 = 1 \pmod{13}$ (Тангента 52, стр. 41, Писмени задаци, задатак 14).

2. *Анализа.* Нека је O центар описане кружнице $\triangle ABC$ и C_1 средиште странице AB. Тада је $OS \perp AB$ (симетрала угла и наспрамне странице троугла се секу на описаној кружници троугла), а C_1 припада правама OS и CT.

Конструкција. Нека је O центар описане кружнице $\triangle VST$. Тачка C је пресек праве која садржи V, паралелне са OS, и те кружнице (различит од V). Тачка C_1 се добија у пресеку праве CT и OS, а тачке A и B у пресеку праве нормалне на OS кроз C_1 и описане кружнице $\triangle VST$.

Доказ. По конструкцији је $CV \perp AB$, па CV садржи висину из C троугла ABC. По конструкцији, AB је тетива симетрична у односу на праву која пролази кроз центар круга (OS), па S дели лук $\widehat{AB}$ кружнице који не садржи тачку C на два једнака дела, одакле је $\sphericalangle BCS = \sphericalangle CSA$, тј. права CS је симетрала угла код C троугла ABC. По конструкцији, CT садржи средиште дужи AB, па ова права садржи тежишну дуж која одговара темену C троугла ABC.

Дискусија. Ако су V, S и T колинеарне, задатак нема решења. Иначе, могућа је конструкција тачке O. Тачка C се може конструисати ако права кроз V паралелна са OS није тангента описане кружнице $\triangle VST$, тј. не сме бити $2\cdot\sphericalangle VTS = \sphericalangle VOS = 90^\circ$ (дакле, ако је $\sphericalangle VTS = 45^\circ$, задатак нема решења). Пресек правих CT и OS (тачка C_1) мора се налазити унутар кружнице, тј. тачке T и V морају бити са различитих страна праве OS, одакле следи да су $\sphericalangle VTS$ и $\sphericalangle VTS$ оштри. Права AB не сме садржати C, тј. $\sphericalangle VST \neq 90^\circ$. Избор тачака A и B (од две добијене пресечне тачке) даје решења која су иста до на симетрију.

Дакле, ако је $\triangle VST$ недегенерисан троугао, са оштрим угловима код темена V и T и такав да угао код S није 90°, а угао код T није 45°, постоји једно (до на симетрију) решење. Иначе, задатак нема решења.

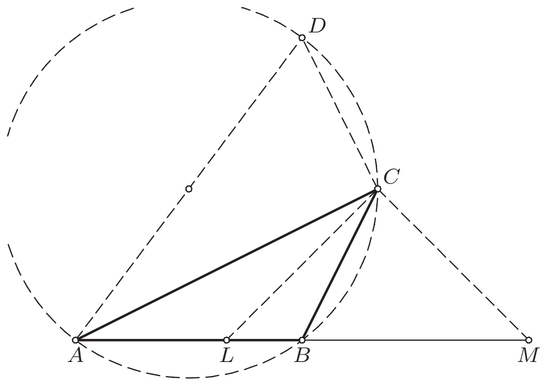
3. Како је

$$\begin{aligned} & x^2y^4 + 2\cdot\left(x^2+2\right)\cdot y^2 + 4xy + x^2 - 4xy^3 \\ = \ & x^2\left(y^4 - 2y^2 + 1\right) - 4xy(y^2-1) + 4y^2 + 4x^2y^2 \\ = \ & \left[x(y^2-1)\right]^2 - 2\cdot\left[x(y^2-1)\right]\cdot(2y) + (2y)^2 + (2xy)^2 \\ = \ & \left[x(y^2-1) - 2y\right]^2 + (2xy)^2 \end{aligned}$$

и како је збир квадрата реалних бројева ненегативан, следи тражена неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $x = y = 0$.

4. Нека су α, β, γ одговарајући углови троугла. Како је угао између унутрашње и спољашње симетрале прав и $CL = CM$, следи да је $\triangle LMC$ једнакокрако-правоугли (са правим углом код темена C). Како је збир углова троугла 180°, следи $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$ и (за $\triangle LBC$) $180^\circ = \beta + \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle CLB = \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 45^\circ = 135^\circ + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$, одакле је $\alpha = \beta - 90^\circ$.

Нека је D дијаметрално супротна тачка описане кружнице $\triangle ABC$ у односу на тачку A. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, са наспрамним тачкама B и D (по условима задатка), па је $\sphericalangle CDA = 180^\circ - \beta$ и (из правоуглог $\triangle ACD$) $\sphericalangle CAD = 180^\circ - \sphericalangle CDA - \sphericalangle ACD = 90^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta - 90^\circ$.



ДР 09 1Б 4

Дакле, BC и CD су тетиве описане кружнице $\triangle ABC$ над истим углом, па је $BC = CD$. На основу Питагорине теореме (за $\triangle ACD$) следи $4R^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + BC^2$.

5. Уколико се у првој врсти и k-тој колони налази број i ($1 \leqslant i \leqslant 2803$), у другој врсти и k-тој колони се могу налазити бројеви који су не мањи од i; таквих бројева има $2803-i+1 = 2804-i$, па могућих попуњавања k-те колоне има $\sum_{i=1}^{2803}(2804-i) = \sum_{j=1}^{2803} j = \frac{2803\cdot 2804}{2}$. Како попуњавање колоне не ограничава попуњавања других колона, свака колона се попуњава независно од пресосталих, па је тражени број $\left(\frac{2803\cdot 2804}{2}\right)^{2009}$.

Други разред, А категорија

1. Дељењем обе стране полазне једначине са $28\cdot 3\cdot 2009$ добија се еквивалентна једначина $1 = \left(28\cdot 3^{x+1}\cdot 2009^{x^2+x+1}\right)^{x-1}$. Последња једначина је еквивалентна (логаритмовањем) са $x-1=0$ или $28\cdot 3^{x+1}\cdot 2009^{x^2+x+1} = 1$. Како је $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$, то је и $2009^{x^2+x+1} > 3^{x^2+x+1}$, па за свако реално x важи $28\cdot 3^{x+1}\cdot 2009^{x^2+x+1} > 28\cdot 3^{x+1}\cdot 3^{x^2+x+1} = 28\cdot 3^{x^2+2x+2} = 28\cdot 3^{(x+1)^2+1} \geqslant 28\cdot 3^1 > 1$, тј. једначина $28\cdot 3^{x+1}\cdot 2009^{x^2+x+1} = 1$ нема решења.
Дакле, једино решење полазне једначине је $x=1$.

2. Ако је $\alpha\in\mathbb{Q}$ рационална нула полинома $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ и $\alpha = \frac{p}{q}, p,q\in\mathbb{Z}, (p,q)=1$, тада $p \mid a_0$ и $q \mid a_n$. Следи, ако полазна једначина има неко рационално решење, оно мора бити целобројно. $x=1$ није решење једначине.
Нека је $x\neq 1$. Тада је

$$\begin{aligned}
& x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx + n + 1 \\
= \ & \left(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1\right) + \ldots + (x+1) + 1 \\
= \ & \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^n-1}{x-1} + \ldots + \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{x-1}{x-1} \\
= \ & \frac{\frac{x^{n+2}-1}{x-1} - n - 2}{x-1} = \frac{x^{n+2}-(n+2)x+n+1}{(x-1)^2},
\end{aligned}$$

па је полазна једначина еквивалентна са $x^{n+2}-(n+2)x+n+1 = 0$. $x=-1$ и $x=0$ нису решење ове једначине.
Ако је $|x|>1$ и $n>1$ тада је ($x\in\mathbb{Z}$, па је и $|x|\geqslant 2$)

$$\begin{aligned}
2^{n+1}\cdot|x| &\leqslant |x|^{n+1}\cdot|x| = |x^{n+2}| = |(n+2)x+(n+1)| \\
&\leqslant (n+2)|x| + (n+1) < (2n+3)|x|,
\end{aligned}$$

што је немогуће, јер је $2^{n+1} > 2n+3$ за $n\geqslant 2$ (ово се може показати, на пример, индукцијом; заиста, важи $2^{2+1} = 8 > 7 = 2\cdot 2+3$, а ако је $2^{n+1} > 2n+3$, следи $2^{n+2} = 2\cdot 2^{n+1} > 2(2n+3) = 4n+6 > 2n+5 = 2(n+1)+3$).
Једина преостала могућност је $n=1$; тада једначина гласи $x+2=0$, и има рационално решење $x=-2$.

3. Нека су a, b, c одговарајуће странице троугла, P његова повшина, а s полуобим. Како је $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, следи

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma &= \sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\\ &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.\end{aligned}$$

Из синусне теореме је $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, па како је $rs=P=\dfrac{abc}{4R}$, следи

$$\begin{aligned}\frac{r}{R} &= \frac{abc}{2R^2(a+b+c)}=\frac{8R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R^3(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}\\ &= \frac{2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\\ &= 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1\\ &= \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1,\end{aligned}$$

па је $r=R\cdot(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)$. Из претходног и неједнакости између аритметичке и хармонијске средине (како је троугао оштроугли, важи $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma>0$) следи

$$\begin{aligned}\frac{9R}{R+r} &= \frac{9}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}\leqslant 3\cdot\frac{\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}}{3}\\ &= \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\,.\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

4. Нека је S_k^n број свих партиција од n елемената на k дисјунктних подскупова. Тражена распоређивања су све партиције скупа $\{1,2,3,4,5,6\}$, па је решење задатка $S_1^6+S_2^6+S_3^6+S_4^6+S_5^6+S_6^6$.

1° $S_1^6=\binom{6}{6}=1$ (све куглице су у истој кутији).

2° Како је $6=5+1=4+2=3+3$ (представљање броја 6 преко два сабирка; $6=5+1$ означава да је 5 куглица у једној, а једна у другој кутији и слично за преостала представљања), следи $S_2^6=\dbinom{6}{5}+\dbinom{6}{4}+\dbinom{6}{3}\cdot\dfrac{1}{2!}=31$ (множење са $\dfrac{1}{2!}$ у претходном рачунању настаје јер су избор неке три куглице и избор преостале три куглице уствари исти избор; ово дељење се јавља када су неки од подскупова на које се деле куглице исте кардиналности).

3° Како је $6=4+1+1=3+2+1=2+2+2$, следи $S_3^6=\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2}+\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{3!}=90$.

4° Како је $6=3+1+1+1=2+2+1+1$, следи $S_4^6=\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{2!}=65$.

5° Како је $6=2+1+1+1+1$, следи $S_5^6=\binom{6}{2}=15$.

6° Како је $6=1+1+1+1+1+1$, следи $S_6^6=1$ (формално, $S_6^6=\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\frac{1}{6!}$).

Дакле, тражени број је $S_1^6+S_2^6+S_3^6+S_4^6+S_5^6+S_6^6=1+31+90+65+15+1=203$.

5. Нека је $k\in\mathbb{N}$ и $x=5\cdot10^{k+1}-1$. Како је

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(5\cdot10^{k+1}-1\right)^2=25\cdot10^{2k+2}-10\cdot10^{k+1}+1\\ &= 25\underbrace{00\ldots0}_{2k+2}-10\underbrace{00\ldots0}_{k+1}+1=24\underbrace{99\ldots9}_{k}0\underbrace{00\ldots0}_{k}1, \end{aligned}$$

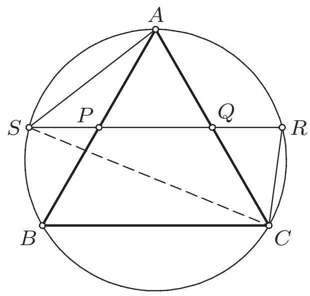
збир цифара броја x^2 једнак је $2+4+1+k\cdot9=9k+7$. Дакле, сваки број облика $9k+7$ ($k\in\mathbb{N}$) једнак је збиру цифара неког квадрата, па је такав и 2008^{2009}, јер је $2009^{2008}\equiv2^{2008}=\left(2^6\right)^{334}\cdot2^4\equiv1\cdot16\equiv7 \pmod 9$.

Друго решење. Како је $2009^{2008}\equiv1 \pmod 3$, задатак решава и конструкција из другог решења петог задатка за први разред А категорије.

Други разред, Б категорија

1. Како свежи краставци садрже 99% воде, 100 килограма свежих краставаца садрже 1 килограм суве материје. Ујутро ће тај килограм бити 2% укупне масе, тј. тежина краставаца ујутру ће бити 50 килограма (Тангента 52, стр. 21, Наградни задаци, М704).

2. Нека је други пресек праве PQ и описане кружнице $\triangle ABC$. Тада је $\sphericalangle RQC=\sphericalangle AQS$ (унакрсни углови) и $\sphericalangle CRQ=\sphericalangle CAS=\sphericalangle QAS$ (углови над тетивом CS), па је $\triangle ASQ\sim\triangle RCQ$, одакле је $\dfrac{AQ}{QR}=\dfrac{SQ}{QC}$. Како је $SQ=PR$ и $AQ=QC=PQ$ (Q је средиште дужи AC, а $\triangle PQA$ је једнакостраничан), следи $\dfrac{PQ}{QR}=\dfrac{PR}{PQ}$.



ДР 09 2Б 2

Напомена. Однос по коме тачка Q дели дуж PR назива се *златни пресек*; ово је једна од могућих конструкција златног пресека.

3. Како је логаритамска функција растућа када је њена основа већа од 1, следи

$$a-2=\log_3 10-2=\log_3\frac{10}{9}>\log_3\frac{17}{16}=\frac{\log_4\dfrac{17}{16}}{\log_4 3}>\log_4\frac{17}{16}=\log_4 17-2=b-2,$$

(пошто је $\log_4\dfrac{17}{16}>0$ и $1>\log_4 3>0$), па је $a>b$.

Друго решење. Нека је $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$ дефинисана са $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln x}$. Како је

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot\ln x-\ln(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}<\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\left(\ln x^2-\ln(x^2+1)\right)}{(\ln x)^2}<0,$$

следи да је f строго монотоно опадајућа на $(2,\infty)$, па је $a=f(3)>f(4)=b$.

4. Ако је $a=0$, следи $f(f(x))=f(x+1)=x+2$, што може бити негативно, па $a=0$ није решење задатка.

Нека је $a<0$. Једначина $f(x)=-1$ је квадратна; њена дискриминанта је $D=1-8a>0$, па постоји $\alpha\in\mathbb{R}$ тако да је $f(\alpha)=-1$. Следи $f\left(f(\alpha)\right)=f(-1)=a<0$, тј. ни $a\in(-\infty,0)$ нису решења задатка.

Нека је $a>0$. Дискриминанта квадратне функције $f(x)$ је $D=1-4a$.

1° Ако је $a>\frac{1}{4}$, тада је $D<0$, па за свако $x\in\mathbb{R}$ важи $f(x)>0$, одакле је $f\left(f(x)\right)>0$ за свако $x\in\mathbb{R}$.

2° Ако је $a\leqslant\frac{1}{4}$, квадратна функција f има минимум и узима све вредности које су не мање од $y_T=\dfrac{4a\cdot 1-1^2}{4a}=1-\dfrac{1}{4a}$, па је

$$((\forall x\in\mathbb{R})\,(f(f(x))\geqslant 0))\Leftrightarrow((\forall y\geqslant y_T)\,(f(y)\geqslant 0))\Leftrightarrow(y_T\geqslant x_+),$$

где је x_+ већа нула квадратне функције $f(x)$, тј. тражене вредности у овом случају су решења неједначине $1 - \dfrac{1}{4a} \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{4a} \geqslant \dfrac{\sqrt{1-4a}}{2a}$, што је (на $\left(0, \frac{1}{4}\right]$) еквивалентно са $(4a+1)^2 \geqslant 4(1-4a) \Leftrightarrow 16a^2 + 24a - 3 \geqslant 0$. Рашења последње неједначине унутар $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ су $\left[\frac{2\sqrt{3}-3}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Дакле, тражене вредности су $a \geqslant \dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$.

5. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $A(x) \in \mathbb{R}[x], \deg A(x) = n \geqslant 1$ *симетричан* ако и само ако за свако $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ важи $A(x) = x^n \cdot A\left(\frac{1}{x}\right)$. Непосредно следи да је полином $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ симетричан ако и само ако је $a_k = a_{n-k}$ за свако $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Нека су $A(x)$ и $B(x)$ симетрични полиноми, $\deg A(x) = m$, $\deg b(x) = n$. Тада је полином $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ степена $m+n$ и за свако $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $C(x) = A(x) \cdot B(x) =$

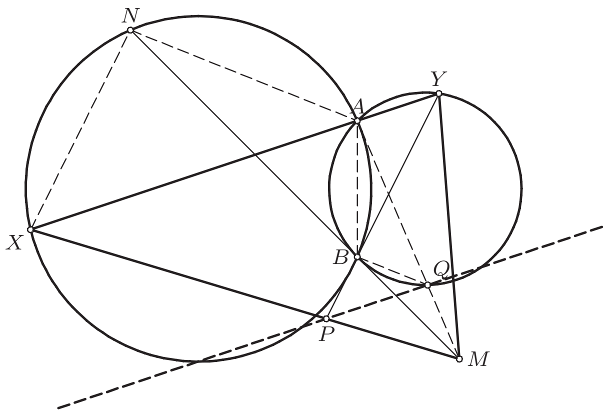
$$x^m \cdot A\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^n \cdot B\left(\frac{1}{x}\right) = x^{m+n} \cdot A\left(\frac{1}{x}\right) \cdot B\left(\frac{1}{x}\right) = x^{m+n} \cdot C\left(\frac{1}{x}\right),$$

па је и $C(x)$ симетричан. Дакле, производ два симетрична полинома је симетричан полином. Индукцијом следи да је производ произвољног броја симетричних полинома такође симетричан полином.

Специјално, полином $P(x) = (x^4+x^3-3x^2+x+1)^{2008}$ је симетричан. Како је $2 \cdot (a_1 + a_3 + \ldots + a_{8029} + a_{8031}) = P(1) - P(-1) = 1 - 3^{2008} < 0$, бар један од коефицијената $a_1, a_3, \ldots, a_{8029}, a_{8031}$ је негативан (нека је то a_k). Како је $P(x)$ симетричан, следи $a_k = a_{8032-k}$, а како је $k \neq 8032 - k$ (јер је k непаран број и $4 \mid 8032$), следи да су бар два негативна коефицијента овог полинома негативна.

2. Нека је B унутар троугла XMY (остали случајеви се решавају аналогно).

Нека је N пресек круга k_1 и праве BM (различит од B). Тада је $\sphericalangle QBM = \sphericalangle QAB = \sphericalangle ANB$ (тангентни и тетивни углови), па је $NA \parallel BQ$. Како је $\sphericalangle MBP = \sphericalangle BQY$ (тангентни и тетивни углови), следи $\sphericalangle MBP = 180^\circ - \sphericalangle YAB = \sphericalangle BAX = \sphericalangle BNX$ (последња једнакост као углови над тетивом BX у k_1), па је $PB \parallel XN$. Следи $\dfrac{XN}{PB} = \dfrac{NM}{BM} = \dfrac{NA}{BQ}$, па је $\triangle PQB \sim \triangle XAN$, одакле је (уз већ утврђене паралелности) $PB \parallel XA$.



ДР 09 3А 2

3. Нека је $y_k = x_{k+1} - x_k$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тада је $y_0 = y_n = 0$. Нека тврђење није тачно, тј. нека је $|x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j| = |y_j - y_{j-1}| < \frac{4}{n^2}$ за свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Сабирањем неједнакости $y_j - y_{j-1} < \frac{4}{n^2}$ за $j = 1, 2, \ldots, k$ добија се $y_k < \frac{4k}{n^2}$. Аналогно, сабирањем неједнакости $y_j - y_{j+1} < \frac{4}{n^2}$ за $j = k, k+1, \ldots, n-1$ добија се $y_k < \frac{4(n-k)}{n^2}$.

1° Ако је n непаран, тада је

$$\begin{aligned} 1 &= y_0 + y_1 + \ldots + y_n = \Big(y_1 + \ldots + y_{\frac{n-1}{2}}\Big) + \Big(y_{\frac{n+1}{2}} + \ldots + y_n\Big) \\ &< \frac{4}{n^2} \cdot \left(1 + \ldots + \frac{n-1}{2}\right) + \frac{4}{n^2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + \ldots + 1\right) \\ &= \frac{4}{n^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{n^2}, \end{aligned}$$

што је немогуће.

2° Ако је n паран, тада је

$$\begin{aligned} 1 &= y_0 + y_1 + \ldots + y_n = \big(y_1 + \ldots + y_{\frac{n}{2}-1}\big) + \big(y_{\frac{n}{2}} + \ldots + y_{n-1}\big) \\ &< \frac{4}{n^2} \cdot \Big(1 + \ldots + \Big(\frac{n}{2} - 1\Big)\Big) + \frac{4}{n^2} \cdot \Big(\frac{n}{2} + \ldots + 1\Big) \\ &= \frac{4}{n^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big(\Big(\frac{n}{2} - 1\Big) \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \Big(\frac{n}{2} + 1\Big)\Big) = 1, \end{aligned}$$

што је немогуће.

Следи тврђење задатка.

4. Сређивањем се добија се $(a-1)^2 = b^2 + c^2 + 1$, одакле је $c^2 + 1 = (a-b-1)(a+b-1)$. Како је број $a+b-1$ облика $4k+3$ (за неко $k \in \mathbb{N}_0$), неки прост p овог облика $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}_0$) дели c^2+1, што је немогуће. Дакле, не постоје бројеви који задовољавају услове задатка.

5. Нека су линије између редова обележене бројевима од 1 до 9, а линије између колона бројевима од 1 до 5. Нека су четири одломљена правоугаоника означена са A, B, C и D, и, за свако $P \in \{A,B,C,D\}$, нека су r_P и k_P линија између редова и линија између колона, редом, по којима је одломљен правоугаоник P. Избором $r_A, r_B, r_C, r_D \in \{1,\ldots,9\}$ и $k_A, k_B, k_C, k_D \in \{1,\ldots,5\}$ тако да важи $k_A \leqslant k_B$, $k_D \leqslant k_C$, $r_A \leqslant r_D$ и $r_B \leqslant r_C$ добијају се сви могући начини да се четири правоугаоника одломе, с тим да неки избори нису валидни, јер може доћи до преклапања између правоугаоника A и C, или B и D (али не истовремено). Оваквих избора има

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2} = 455\,625.$$

Од овог броја треба одузети број избора за које се преклапају правоугаоници A и C, или B и D. Правоугаоници A и C се преклапају ако су задовољена и два додатна услова, $k_A > k_C$ и $r_A > r_C$. Оваквих избора има

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{11}{4} = 11\,550.$$

Због симетрије, избора за које се преклапају правоугаоници B и D има исто толико, па је укупан број валидних избора $455\,625 - 2 \cdot 11\,550 = 432\,525$.

Трећи разред, Б категорија

1. Права AB (чија је једначина $y = k_{AB}x + n_{AB}$) је нормална на праву $3x+y+19=0$ и садржи тачку $A(0,-9)$, па је $k_{AB} = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$ и $n_{AB} = -9$, тј. једначина праве која садржи страницу AB је $x - 3y - 27 = 0$.

Тачка B се налази у пресеку праве AB и праве која садржи тежишну дуж која одговара овом темену, па се координате темена B добијају решавањем система $x - 3y - 27 = 0 \wedge x + 2y + 13 = 0$. Следи $B(3,-8)$. Тачка $C(x_C, y_C)$ припада правој $3x+y+19=0$, па је $y_C = -19 - 3x_C$, а координате тачке која полови дуж AC су $\left(\dfrac{x_C}{2}, -14 - \dfrac{3}{2} \cdot x_C\right)$. Како ова тачка припада и тежишној дужи која одговара темену B, следи $\dfrac{x_C}{2} + 2 \cdot \left(-14 - \dfrac{3}{2} \cdot x_C\right) + 13 = 0$, одакле је $x_C = -6$, тј. координате тачке C су $(-6,-1)$.

Права AC је права која садржи тачке $A(0,-9)$ и $C(-6,-1)$, па је њена једначина $4x+3y+27=0$; права BC је права која садржи тачке $B(3,-8)$ и $C(-6,-1)$, па је њена једначина $7x+9y+51=0$ (Тангента 51, стр. 48, Писмени задаци, задатак 2).

2. Без умањења општости, нека тачка M припада луку AB који не садржи тачку C. Ако је $\sphericalangle MCA = x$ $(0^\circ \leqslant x \leqslant 60^\circ)$, тада је $\sphericalangle BCM = 60^\circ - x$ и $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MBA + \sphericalangle ABC = \sphericalangle MCA + 60^\circ = x + 60^\circ$. Како је $\cos y + \cos(y + 120^\circ) + \cos(y - 120^\circ) = \cos y + 2\cos y \cos 120^\circ = 0$, $\sin^4 x = \left(\dfrac{1-\cos^2 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \dfrac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{8} = \dfrac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}$ и (по синусној теореми) $MA = 2R\sin x$, $MB = 2R\sin(60^\circ - x)$, $MC = 2R\sin(60^\circ + x)$, следи $MA^4 + MB^4 + MC^4 =$

$$\begin{aligned}
&= 16R^4 \cdot \big(\sin^4 x + \sin^4(60^\circ - x) + \sin^4(x + 60^\circ)\big)\\
&= 16R^4 \cdot \big(\sin^4 x + \sin^4(x - 60^\circ) + \sin^4(x + 60^\circ)\big)\\
&= 2R^4 \cdot \big[9 - 4 \cdot (\cos 2x + \cos(2x - 120^\circ) + \cos(2x + 120^\circ))\\
&+ (\cos 4x + \cos(4x - 240^\circ) + \cos(4x + 240^\circ))\big]\\
&= 2R^4 \cdot \big[9 - 4 \cdot (\cos 2x + \cos(2x - 120^\circ) + \cos(2x + 120^\circ))\\
&+ (\cos 2x + \cos(4x + 120^\circ) + \cos(4x - 120^\circ))\big] = 18R^4.
\end{aligned}$$

3. Висина купе је $h = \sqrt{s^2 - r^2} = 16$. Површина базе призме B једнака је површини троугла чије су странице $a = 17$, $b = 10$ и $c = 9$; како је полуобим овог троугла $s_t = \dfrac{a+b+c}{2} = 18$, по Хероновом обрасцу следи $B = \sqrt{s_t(s_t - a)(s_t - b)(s_t - c)} = \sqrt{18 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9} = 36$. Раван која садржи основу призме чија се темена налазе на омотачу купе сече омотач купе по кружници чији је полупречник једнак кружници описаној око троугла из текста задатка, тј. по кружници полупречника $R = \dfrac{abc}{4B} = \dfrac{85}{8}$. Купа која се налази са једне од страна ове равни је слична са полазном купом. Њена висина је $h - H$, где је H висина призме, па је $\dfrac{R}{r} = \dfrac{h-H}{h}$, одакле је $H = h \cdot \left(1 - \dfrac{R}{r}\right) = 16 \cdot \left(1 - \dfrac{5}{8}\right) = 6$.

Коначно, тражена запремина је $V = B \cdot H = 216$ (Тангента 53, стр. 38, Писмени задаци, задатак 5).

4. На слици ДР 09 3Б 4-1 поља табле 3×4 су обележена тако да, полазећи од поља означаног са 1, коњичким скоковима по овој шеми се пролазе сва остала поља, свако по једном. Коњи постављени на непарним пољима (има их 6) се међусобно неће тући, а код размештаја било којих 7 коња на табли појавиће се бар два на пољима обележена суседним бројевима (који ће се тући).

Следи да се на таблу 3×4 може да поставити највише 6 коња, тако да се никоја два од њих не туку.

На табли 7×7 се може издвојити четири дисјунктна правоугаоника формата 3×4 (или 4×3), као на слици ДР 09 3Б 4-2. Следи да се на ову таблу не може поставити више од $4 \cdot 6 + 1 = 25$ коња који се међусобно не туку. А толико се може поставити, ако се коњи сместе на свако друго поље, полазећи од угла табле. Дакле, тражени број је 25.

10	7	2	5
1	4	11	8
12	9	6	3

ДР 09 3Б 4-1

■	■	■	■	⊛	⊛	⊛
■	■	■	■	⊛	⊛	⊛
■	■	■	■	⊛	⊛	⊛
⊚	⊚	⊚		⊛	⊛	⊛
⊚	⊚	⊚	★	★	★	★
⊚	⊚	⊚	★	★	★	★
⊚	⊚	⊚	★	★	★	★

ДР 09 3Б 4-2

5. Неједначина $\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2$ има смисла за $x > 0$. Како је $\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)} \geqslant \dfrac{\ln x^2}{\ln(x^2+1)} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{2\ln(x+1)} \geqslant \dfrac{\ln x}{\ln(x^2+1)} \Leftrightarrow$ $\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)^2 \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \big(\ln(x^2+1) - \log(x+1)^2\big) \geqslant 0$. За $x > 0$ је $(x+1)^2 > 1$, $(x^2+1 > 1)$ и $(x+1)^2 > x^2+1$, па ($\ln x$ је растућа функција) је $\ln(x+1)^2 > 0$, $\ln(x^2+1) > 0$ и $\ln(x+1)^2 > \ln(x^2+1)$. Следи да је полазна неједначина еквивалентна са $\ln x \leqslant 0$, односно $0 < x \leqslant 1$. Овим је доказано да све неједнакости не могу важити за $x \notin (0,1\,]$.

Са друге стране, за свако $x \in (0,1\,]$ задовољене су све неједнакости. Заиста, за $x = 1$ то је очигледно (сви наведени изрази једнаки су нули), а ако је $x \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$, треба показати $\log_{x^n+1} x^n \geqslant \log_{x^{n+1}+1} x^{n+1}$. Ако је $a = x^n$ и $b = x^{n+1}$, како је $0 < b = x^{n+1} = x^n \cdot x < x^n \cdot 1 = a < 1$, довољно је доказати да за $1 > a > b > 0$ важи $\log_{1+a} a > \log_{1+b} b$. Како је логаритамска функција са основом већом од 1 растућа, важи $\log_{1+a} a > \log_{1+a} b$, а како је $\ln(1+a) > \ln(1+b) > 0$ и $\log b < 0$, следи $\log_{1+a} b = \dfrac{\ln b}{\ln(a+1)} > \dfrac{\ln b}{\ln(b+1)} = \log_{b+1} b$.

Дакле, реални бројеви за које су задовољене све неједнакости су $x \in (0,1\,]$.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $P_k(x) = x^k - k$, (за $k \in \{1,2,\ldots,2009\}$). Све нуле полинома $P_k(x)$ су међусобно различите (то су $k-$ти корени броја k и у комплексној равни припадају кружници са центром у 0 и полупречником $\sqrt[k]{k}$). Дакле, постоји $a \in \mathbb{C}$ тако да је $(x-a)^2 \mid P(x)$ ако и само ако постоје $1 \leqslant k < l \leqslant 2009$ тако да $P_k(a) = P_l(a) = 0$. Дакле, потребно је (не и довољно) да a припада и кружници полупречника $\sqrt[k]{k}$ и кружници са полупречника $\sqrt[l]{l}$ (са центром у 0).

Нека је $f : [\,1,\infty) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Тада је $f'(x) = f(x) \cdot \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, па f расте на $[\,1,e)$, а опада на (e,∞). Следи, ако постоје природни $k < l$, такви да је $\sqrt[k]{k} = \sqrt[l]{l}$, мора бити $k < e < l$. Како је $f(x) > 1$ за свако $x > 1$, то је $k \neq 1$. За $k = 2$ постоји (а због монотоности је јединствена) вредност $l = 4$ тако да је $\sqrt[2]{2} = \sqrt[4]{4}$. Дакле, тражено a мора бити и нула полинома $P_2(x) = x^2 - 2$ и нула полинома $P_4(x) = x^4 - 4$. Како је $P_4(x) = x^4 - 4 = (x^2 + 2) \cdot P_2(x)$, једине тражене вредности су $a = \sqrt{2}$ и $a = -\sqrt{2}$.

2. Видети решење другог задатка за трећи разред А категорије.

3. Неједнакост из задатка је еквивалентна са

$$a(a-b)(2a-b) + b(b-c)(2b-c) + c(c-a)(2c-a) \geqslant 0.$$

Без умањења општости, нека је $a \geqslant \max\{b, c\}$.

1° Нека је $a \geqslant b \geqslant c$. Ако је и $a \geqslant 2c$, онда су сви чланови на левој страни позитивни, па је неједнакост тривијална. Нека је $a \leqslant 2c$. Пошто је $2a - b \geqslant 2c - a$ и $2b - c \geqslant 2c - a$, следи

$$\begin{aligned} & a(a-b)(2a-b) + b(b-c)(2b-c) + c(c-a)(2c-a) \\ \geqslant\ & a(a-b)(2c-a) + b(b-c)(2c-a) + c(c-a)(2c-a) \\ =\ & (2c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant 0. \end{aligned}$$

2° Нека је $a \geqslant c \geqslant b$. Неједнакост је еквивалентна са

$$\begin{aligned} & [a(a-c)(2a-b) + c(c-a)(2c-a)] \\ +\ & [a(c-b)(2a-b) + b(b-c)(2b-c)] \geqslant 0, \end{aligned}$$

па је довољно доказати да су оба сабирка са леве стране последње неједнакости ненегативни. Важи $a(a-c)(2a-b)+c(c-a)(2c-a) \geqslant 0$. Заиста, ако је $2c \leqslant a$, то је тривијално, а ако је $2c \geqslant a$, онда следи из $2a - b \geqslant 2c - a \geqslant 0$. Слично, $a(c-b)(2a-b) + b(b-c)(2b-c) \geqslant 0$ је тривијална у случају $2b \leqslant c$, а ако је $2b \geqslant c$, због $2a - b \geqslant 2b - c \geqslant 0$ следи

$$\begin{aligned} & a(c-b)(2a-b) + b(b-c)(2b-c) \\ \geqslant\ & a(c-b)(2b-c) + b(b-c)(2b-c) \\ =\ & (c-b)(2b-c)(a-b) \geqslant 0. \end{aligned}$$

4. Видети решење четвртог задатка за трећи разред А категорије.

5. Важи тврђење:

> Нека је n узајамно просто са 2 и 3. Тада, ма како се на таблу $n \times n$ постави $n^2 - n + 1$ дама, може се изабрати n дама које се међусобно не нападају. Постоји постављање $n^2 - n$ дама у коме то није могуће урадити.

Ако се $n^2 - n$ дама постави на таблу тако да се ниједна не налази у првој врсти, ма како се изаберу n од њих, бар две морају бити у истој врсти, тј. морају се нападати.

Нека (k, l) $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$ представља поље које се налази у пресеку k-те врсте и l-те колоне. Нека је овом пољу додељен остатак при дељењу са n броја $k + 2l$ (поље је *означено* овим бројем). На овај начин је сваком пољу табле додељен број из скупа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Тада се никоја два поља којима је додељен исти број не налазе у истој врсти, колони или на дијагонали (и следи да је сваком $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ додељено тачно n поља). Заиста:

1° ако су два поља исте врсте ((k, l) и (K, l)) означена истим бројем, следи $n \mid (k + 2l) - (K + 2l) = (k - K)$, па како је $|k - K| < n$, следи $k = K$, тј. $(k, l) = (K, l)$;

2° ако су два поља исте колоне ((k, l) и (k, L)) означена истим бројем, следи $n \mid (k + 2l) - (k + 2L) = 2(l - L)$, а како је $(n, 2) = 1$, следи $n \mid (l - L)$; пошто је $|l - L| < n$, следи $l = L$, тј. $(k, l) = (k, L)$;

3° поља (k, l) И (K, L) су на истој дијагонали ако и само ако је $|k - K| = |l - L|$, тј. $k - l = K - L$ или $k + l = K + L$. Ова поља су означена истим бројем ако и само ако $n \mid (K + 2L) - (k + 2l) = K - k + 2(L - l)$. Последњи израз је једнак $3(L - l)$ у првом случају, односно $L - l$ у другом случају; како је $(n, 3) = 1$, у оба случаја $n \mid (L - l)$, па како је $|L - l| < n$, следи $l = L$, тј. $(k, l) = (k, L)$.

Ако је на таблу постављено $n^2 - n + 1$ дама, $n - 1$ поље је остало празно. Међу њима постоје даме које се налазе на n поља означених истим бројем, јер би у супротном број дама био највише $n(n-1)$, тј. број празних поља бар n. Према претходном никоје две даме на тим пољима нису у истој врсти, колони или на дијагонали, тј. не нападају се.

Из претходног тврђења, како је $(2, 2009) = (3, 2009) = 1$, следи да је одговор на питање задатка $2009^2 - 2009 + 1$.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека су бројеви из задатка $a \leqslant b \leqslant c$. По условима задатка је $a + b + c = 14$, а како су бројеви $a, b + 1$ и c три узастопна члана аритметичког низа, следи:

1° ако је $b + 1 > c$, тада је $15 - c = a + b + 1 = 2c$, одакле је $c = 3$ и $a + b = 11$, па како је $a \leqslant b \leqslant 3$, следи $a < 0$. Ако су два узастопна члана геометријске прогресије истог знака, цела прогресија је тог знака, па је ова ситуација немогућа;

2° ако је $b + 1 \leqslant c$, тада је $14 - b = a + c = 2(b + 1)$, одакле је $b = 4$ и $a + c = 10$. Како су бројеви $a, b - 1 = 3$ и c три узастопна члана геометријског низа, следи да је или $3c = a^2$ (ако је $b - 1 < a$), одакле је $a^2 + 3a - 30 = 0$, па је или $a < 0$ или $a > 4 = b$ или (ако је $a \leqslant b - 1$) $ac = 3^2 = 9$. Из $a + c = 10$ и $ac = 9$, уз $a \leqslant c$ следи $a = 1$, $c = 9$. Дакле, $a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 4^2 + 9^2 = 98$;

(Тангента 52, стр. 44, Писмени задаци, задатак 17).

2. Неједначина $\log_{x^2}(x + 6) \geqslant \frac{1}{4}$ је дефинисана ако и само ако је $x^2 > 0 \wedge x^2 \neq 1 \wedge x + 6 > 0$. тј. ако и само ако је $x \in D = (-6, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

1° Ако је $|x| > 1$ (и $x \in D$) она је еквивалентна са $x+6 \geqslant \left(x^2\right)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 0 \leqslant (x+6)^4 - x^2 = (x^2+11x+36)(x^2+13x+36) = (x^2+11x+36)(x+4)(x+9)$. Како је $x^2+11x+36 > 0$ $(11^2-4\cdot 36 < 0)$, следи да је у овој ситуацији скуп решења неједначине $[-4, -1) \cup (1, \infty)$.

2° Ако је $|x| < 1$ (и $x \in D$) аналогно се добија да је неједначина еквивалентна са $0 \geqslant (x^2 + 11x + 36)(x + 4)(x + 9)$, па је у овој ситуацији скуп решења $(-1, 1)$.

Дакле, решење неједначине $\log_{x^2}(x + 6) \geqslant \frac{1}{4}$ је $[-4, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. Неједначина $\log_{x+a}(x + 4) \leqslant 1$ је дефинисана ако и само ако је $x + a > 0 \wedge x + a \neq 1 \wedge x + 4 > 0$. Специјално, она је (без обзира на вредност параметра a) дефинисана на скупу који је подскуп скупа $(-4, \infty)$, па $x = -4$ не може бити њено решење. Како је $x = -4$ решење прве неједначине, следи да ове две неједначине нису еквивалентне ни за коју вредност параметра a.

3. Ако је $A^2 + B^2 \neq 0$, тада је $\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = 1$, па постоји $\varphi \in [0, 2\pi)$ тако да је $\cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, одакле је $A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\cdot(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2}\cdot \sin(x + \varphi)$. Како за $A = B = 0$ за било које φ важи $A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\cdot\sin(x + \varphi)$, следи

> *Лема.* Постоји $\varphi \in [0, 2\pi)$ тако да је $A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\cdot\sin(x + \varphi)$. Највећа вредност функције $A\sin x + B\cos x$ на $[0, 2\pi]$ је $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Како је $f(x) = a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x = a\cdot\dfrac{1 - \cos 2x}{2} + 2b\sin x\cos x + c\cdot\dfrac{1 + \cos 2x}{2} = \dfrac{a + c}{2} + b\sin 2x + \dfrac{c - a}{2}\cdot\cos 2x$ и као $2x$ узима све вредности из $[0, 2\pi]$ за $x \in [0, 2\pi]$, на основу претходне леме следи да је највећа вредност функије f на $[0, 2\pi]$ једнака

$$\frac{a + c}{2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{c - a}{2}\right)^2} = \frac{a + c + \sqrt{4b^2 + (c - a)^2}}{2}$$

4. Видети решење четвртог задатка за трећи разред Б категорије.

5. Нека су одговарајуће странице троугла a, b, c и нека је C' средиште странице AB. Применом косинусне теореме на $\triangle AC'C$ и $\triangle C'BC$ добија се

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + t_c^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot t_c \cdot \cos\sphericalangle AC'C, \\ a^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + t_c^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot t_c \cdot \cos\sphericalangle BC'C, \end{aligned}$$

одакле је $t_c^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$ (из $\sphericalangle AC'C + \sphericalangle BC'C = 180°$ следи $\cos\sphericalangle AC'C = -\cos\sphericalangle BC'C$). Аналогно је $t_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ и $t_b^2 = \dfrac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$.

Без умањења општости нека је $a \geqslant b \geqslant c$. Следи $t_a^2 - t_b^2 = \dfrac{3}{4} \cdot (b^2 - a^2) \leqslant 0$, па је $t_a \leqslant t_b$. Аналогно је и $t_b \leqslant t_c$. Зато је $a + c = 2b$ и $t_a + t_c = 2t_b$, па следи

$$8t_a t_c = 4 \cdot (4t_b^2 - t_a^2 - t_c^2) = 7a^2 + 7c^2 - 8b^2.$$

Квадрирањем последње једнакости и заменом $b = \dfrac{a+c}{2}$, добија се

$$(5c^2 - a^2 + 2ac)(5a^2 - c^2 + 2ac) = (5a^2 + 5c^2 - 4ac)^2,$$

па дељењем са c^4 сменом $k = \dfrac{a}{c}$ следи

$$(5 - k^2 + 2k)(5k^2 - 1 + 2k) = (5 + 5k^2 - 4k)^2 \Leftrightarrow 5k^4 - 8k^3 + 6k^2 - 8k + 5 = 0.$$

Деобом последње једначине са k^2 и сменом $t = k + \dfrac{1}{k}$, добија се $5t^2 - 8t - 4 = 0$, чија су решења $t_1 = 2$ и $t_2 = -\dfrac{2}{5}$. Како мора бити $t > 0$, следи да је $t = 2$, одакле је $k = 1$, тј. $a = c$, одакле је $a = b = c$.

Једнакостраничан троугао задовољава услове задатка, а из претходног следи да је он и једини такав, па су углови $\triangle ABC$ једнаки међу собом и износе $60°$.

Садржај