ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА
СРЕДЊОШКОЛАЦА
2010/2011.

Београд, 2011.

Организациони одбор 53. Државног такмичења из математике

1. Професор др Зоран Каделбург, председник ДМС

2. Марко Радовановић, Математички факултет, Београд

3. Љиљана Златановић, директор Гимназије „Бора Станковић”

4. Бранко Антић, професор Гимназије „Бора Станковић”

5. Славиша Костић, професор Гимназије „Бора Станковић”

6. Слађана Кваић, професор Гимназије „Бора Станковић”

7. Ана Милетић, професор Гимназије „Бора Станковић”

8. Ненад Тотић, професор Гимназије „Бора Станковић”

9. др Радослав Димитријевић, професор ПМФ Ниш

10. Љубиша Динић, председник Подружнице математичара Ниш

11. Славољуб Милосављевић, члан Извршног одбора Подружнице математичара Ниш

Организацију такмичења помогли

1. Град Ниш

2. Градска општина Медијана

3. ЈП ПТТ саобраћаја „Србија”

4. Србија-турист

5. Еуротурс Ниш

6. Дирекција за изградњу Града Ниша

7. Туристичка организација Града Ниша

8. Институт за јавно здравље

9. Delta maxi d.o.o. - Tempo 03 Niš

10. Yumis Niš

11. Office1superstore

12. Пеликан - принт Ниш

13. Народно позориште

14. Дом војске

Ниш - име, значај, историја...

Ниш, један од најстаријих градова на Балкану познат као „Капија" Истока и Запада због свог географског положаја.

Као веома важна раскрсница на којој су се сусретали Исток и Запад, Ниш је одувек био веома битно место и мета потенцијалних освајача. У време антике, Ниш је био чврст и неосвојив римски логор и веома важна стратегијска тачка.

Велики император Константин рођен је у Нишу 274. године и у њему је имао резиденцију Медијану. За његове владавине град је био веома снажан војни, административни и економски центар, а сам Константин Велики се радо враћао месту свог рођења. У временима која су наступила, Ниш је више пута био освајан и разаран.

Хуни су заузели и разорили Ниш 441. године, да би га касније обновио Јустинијан Велики. Словени насељавају град 540. године.

Након краће колонизације од стране Византије у 11. веку у Ниш продиру Угри, да би након несталног периода у које је Град прелазио из грчке у угарске руке, коначно постао српски, али само на кратко.

Након златног периода експанзије српске државе под Немањићима, Ниш бива први на удару турске најезде, тако да га султан Мурат узима од кнеза Лазара 1386. Након пропасти српске кнежевине и краткотрајне владавине Бранковића, град на Нишави коначно бива изгубљен 1448. године. У периоду турске владавине у Нишу је изграђена тврдјава 1723. године и та монументална грађевина спада у једну од најбоље очуваних и најлепших те врсте на Балкану.

У току Првог српског устанка одиграла се чувена битка на Чегру надомак Ниша 31. марта 1809. године и у њој је погинуло 3000 српских устаника на челу са храбрим ресавским војводом Стеваном Синђелићем. Као резултат овог српског пораза настао је стравичан споменик Ћеле Кула, јединствен у свету, до данашњег дана делимично очуван.

Град је за време кнеза Милоша и кнеза Михаила и даље био у турским рукама, а Османлије ће из њега бити заувек протеране 1878. након дугих и тешких борби.

Кнез Милан је 11. јануара 1878. ушао у Нишку тврђаву и тим симболично означио почетак нове епохе у историји града.

За време Првој светског рата Ниш постаје престоница Србије. Влада и Народна скупштина прешли су из Београда у Ниш. У њему је, између осталог, примљен телеграм којим Аустро-угарска објављује рат Србији а донесена је и чувена Нишка декларација 7. децембра 1914. године.

Након завршетка рата и ослобођења Србије, Ниш постаје центар тога дела државе.

Избијањем Другог светског рата и капитулацијом Краљевине Југославије, наступају тешка времена за град Ниш и његове житеље. Као веома битна стратешка тачка на раскрсници путева који су водили ка Грчкој и даље у Африку, Ниш је био од веома великог значаја немачком окупатору. Нацистички окупатори спроводили су репресивну политику према градском живљу и у ту сврху био је оформљен озлоглашени концентрациони логор на Црвеном Крсту, са ког су хиљаде заточеника одвођени на масовна стрељања на Бубњу. У исто време, у околини Ниша, баш као и у читавој земљи, беснео је грађански рат, који је додатно погоршао читаво стање.

Победом комуниста у грађанском рату, као и повлачењем немачких снага са простора Балкана, Ниш је коначно ослобођен 14. октобра 1944. године од стране снага Црвене армије и партизана. У послератном периоду, град је постао административни, политички, привредни и културни центар тога дела тадашње СФР Југославије.

Данас је културни и привредни центар јужне Србије.

Неколико речи о школи домаћину

Гимназија „Бора Станковић” траје 41 годину и може се поносити својим доприносом нашој култури, науци, привреди. Формирана је 1. септембра 1969. године.

У саставу има 24 одељења и 716 ученика распоређених у три смера: природно-математички, друштвено-језички и информатички. Информатички смер постоји од 2006. године и додатно популаризује гимназију, нудећи с једне стране осавремењене наставне садржаје, а са друге потпуну рачунарску писменост, задржавајући при том неопходан ниво гимназијског образовања.

Селективна је по избору ученика; од укупног броја ученика који се уписују у први разред, 80% су носиоци Вукове дипломе. Пролазност ученика на крају школске године је близу 100%, а просечна оцена школе је изнад 4,50. На пријемним испитима за факултете, ученици наше школе заузимају сам врх ранг листа, студенти су генерације, будући креативни и научни потенцијал који додатно афирмише школу и Град Ниш.

У периоду од 2001-2010. године ученици наше школе освојили су укупно 150 државних награда из готово свих предмета, а из хемије, биологије и филозофије 4 олимпијске награде, док су на екипном математичком такмичењу „Архимедес” освојене две прве награде и више других. Значајно је да је наш ученик Стефан Стефановић освојио сребрну медаљу на 15. међународној филозофској олимпијади која је одржана 2007. у Анталији, у Турској, у конкуренцији 55 земаља света. Успех је тим већи што је Србија први пут учествовала на овој олимпијаду.

У школи ради много секција: драмска, рецитатирска, новинарска, музичка, ликовна и бројне спортске секције.

Сваке године за Дан школе, организује се седмодневна прослава под називом Борина недеља, у којој учествују сви чланови колектива.

Из мноштва ваннаставних активности издвојићемо следеће:

Драмска секција је у претходном периоду за Дан школе извела следеће представе: „Запиши то Марија”, „Сви моји ученици”, „Антигона”, „Краљева јесен”, „Власт”, „Женски разговори”, „Урнебесна трагедија”, „Коштана”, „Слово о Арсенију и његовом народу”, „Народни посланик”, „Зла жена”, „Ћелава певачица”, „Радован III”, „Пигмилион”, „Професионалац”, „Мрачна комедија”.

Новинарска секција издаје часопис Борополитен од 2005. године.

Грчки језик, као вид факултативне наставе изводи се од 2005. године.

Клуб за Уједињене нације кроз радионице упознаје ђаке са системом Уједињених нација, а кроз акције обележава међународне празнике проглашене од стране Уједињених нација (Дан заштите животне средине, Дан људских права, Дан толеранције...)

Једно од обележја школе је рад на међународним и државним пројектима чиме се остварује сарадња са бројним државним и образовним институцијама и невладиним организацијама.

Међународни пројекти у које је Школа укључена су: PASCH, ACES, CONNECTING CLASSROOMS, Junior Achievement Serbia.

Поред горе поменутих, заслужује да се наведе и сарадња са бројним државним и образовним институцијама: Једна школа, један споменика, Join Multimedia, Seeli, пројекти сарадње преко Београдске Отворене Школе, Млади истраживачи Србије...

Због остварених резултата из математике у дугогодишњем периоду, нашој школи је указано поверење Друштва математичака Србије за организовање двеју значајних манифестација: Републичког такмичења из математике 2004. године и Српске математичке олимпијаде 2010. године.

О континуираном квалитетномном раду Школе сведоче и награде које је добила као што је „25. мај”, „Учитељ Таса”, а 2004. Школа је проглашена за најбољу у Србији из хемије од стране фондације Костић. Поред наведеног, школске 2008/2009. године Министарство просвете прогласило је Гимназију „Бора Станковић” за четврту по популарности у Србији, а прву у Нишком региону.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2010/2011.

1. Балтић мр Владимир, Факултет организационих наука, Београд

2. Баралић Ђорђе, Математички институт САНУ, Београд

3. Башић Бојан, ПМФ, Нови Сад

4. Димитријевић мр Слађана, ПМФ, Крагујевац

5. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад

6. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

7. Ђорић Милош, Математички факултет, Београд

8. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

9. Живаљевић др Раде, Математички институт САНУ, Београд

10. Илић Александар, ПМФ, Ниш

11. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд

12. Кртинић мр Ђорђе, Математички факултет, Београд

13. Лукић Миливоје, Калтех, САД

14. Матић др Иван, Дјук, САД

15. Милићевић др Ђорђе, Универзитет у Мичигену, САД

16. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш

17. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд

18. Петковић др Марко, ПМФ, Ниш

19. Радовановић Марко, Математички факултет, Београд, председник

20. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

21. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

22. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

23. Уљаревић Игор, Математички факултет, Београд

24. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица

2. Рожњик мр Андреа, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Први разред, А категорија

1. Нека су O и H центар описаног круга и ортоцентар троугла ABC, а G_1, G_2 и G_3 тежишта троуглова HBC, HCA и HAB, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OH}\,.$$

2. На колико начина је могуће распоредити 11 птица у 3 идентична кавеза, тако да сваки кавез садржи бар три птице?

3. Дата је таблица димензије 2010×2011. Одредити максималан број поља који можемо обојити тако да сваки квадрат димензије 2×2 (састављен од поља таблице) садржи највише два обојена поља.

4. За природан број k са $S(k)$ означен је збир његових цифара. Да ли постоје природни бројеви n и m за које важи

$$S(n) \cdot S(n+1) \cdot \ldots \cdot S(n+m) = 2011^{2010}\,?$$

5. Нека су M и P подножја нормала из темена A троугла ABC на симетрале спољашњих углова код темена B и C, редом. Доказати да је дужина дужи MP једнака половини обима троугла ABC.

Други разред, А категорија

1. Дата је једначина $4x^2 - (3a+1)x - a - 2 = 0$.

а) Одредити све $a \in \mathbb{R}$ тако да за решења x_1 и x_2 једначине важи

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geqslant \frac{40}{9}\,.$$

б) За које $a \in \mathbb{R}$ се оба решења једначине налазе у интервалу $(-1, 2)$?

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. Нека су BD и AE висине оштроуглог троугла ABC. Ако је P тачка пресека правих BD и AE, доказати да је

$$AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD\,.$$

4. Колико има подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 50\}$ чији је збир елемената већи од 637?

5. Нека су AM и BN висине оштроуглог троугла ABC ($\sphericalangle ACB \neq 45°$). Тачке K и T изабране су на полуправама MA и NB, редом, тако да важи $MK = MB$ и $NT = NA$. Доказати да је $KT \parallel MN$.

Трећи разред, А категорија

1. На табли су написани бројеви $1, 2, \ldots, 30$. Онда су избрисана два броја и написана је њихова разлика (од већег је одузет мањи број). Овај поступак је понављан све док на табли није остао само један број. Одредити парност овог броја.

2. Нека су ABC и $A'B'C'$ троуглови такви да је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' = 60^\circ$. Доказати да је

$$2 \cdot BC \cdot B'C' \geqslant AB \cdot A'B' + CA \cdot C'A'.$$

3. На табли је записан полином $x^2 + 2010x + 2011$. У сваком кораку полином $f(x)$ који је записан на табли можемо заменити полиномом

$$x^2 \cdot f\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ или } (x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Да ли после коначно много корака на табли може бити записан полином $x^2 + 2011x + 2010$?

4. Четвороугао $ABCD$ је уписан у круг. На луку CD, који не садржи тачке A и B, налази се произвољна тачка M. Нека дужи MA и MB секу страницу CD у тачкама X и Y, редом. Доказати да однос

$$\frac{DX \cdot CY}{XY}$$

не зависи од положаја тачке M.

5. Дат је низ бројева

$$mp + 1,\ mp^3 + 1,\ mp^5 + 1, \ldots$$

где је p прост, а m природан број.

а) Доказати да се у овом низу налази највише један потпун квадрат.

б) Да ли се у овом низу мора налазити потпун квадрат?

Четврти разред, А категорија

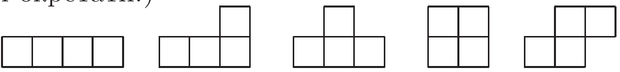
1. Доказати да је функција

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} + 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

на интервалима у којима је дефинисана константна, а затим наћи вредност ове функције.

2. На страницама AB, BC, CD и DA, правоугаоника $ABCD$, одабране су редом тачке E, F, G и H, тако да је четвороугао $EFGH$ ромб. Ако је $AB = 2$ и $BC = 1$, доказати да је $1 \leqslant P \leqslant \frac{5}{4}$, где је P површина ромба $EFGH$.

3. Тетрамино комплет садржи 5 фигурица приказаних на слици (свака тетрамино фигурица има површину 4). Одредити површину највећег квадрата који је могуће поплочати без преклапања, уколико поседујемо 5 тетрамино комплета.
(Није нужно користити свих 25 тетрамино фигурица. Фигурице се могу ротирати и окретати.)



4. Наћи све природне бројеве a и b за које $ab+1$ дели бројеве a^3+3ab^2+2 и $3b^4-2b^3+3$.

5. У троуглу ABC са R и r означени су, редом, полупречник описаног и уписаног круга, а са l_a, l_b и l_c дужине одсечака симетрала унутрашњих углова. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leqslant \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r}{R}}\,.$$

Испитати када се достиже једнакост.

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B ако важи:

1° $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;

2° $A \cap B = \{a\}$;

3° $B \cap \{c, i\} = \emptyset$;

4° $B \setminus A = \{d, e, f, g, h\}$.

2. Дат је скуп $M = \{25, 53, 71, 74\}$ и релација ρ:

$x\rho y \;\Leftrightarrow\;$ цифра десетица броја x је мања од цифре јединица броја y.

Направити таблицу релације ρ у скупу M и испитати која од својстава рефлексивност, симетричност, антисиметричност, транзитивност има релација ρ у скупу M.

3. На колико начина 20 људи може сести на 20 места једног реда у биоскопу, тако да Ана седи поред Бојана, а Весна поред Горана?

4. Познато је да је

$$5^{20} \cdot 20^5 = 30517578{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*},$$

при чему свака звездица представља по једну цифру. Одредити цифре уместо којих се налазе звездице.

5. Дата су пресликавања $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{ако је } n \text{ паран} \\ n-1, & \text{ако је } n \text{ непаран} \end{cases} \text{ и } g(n) = \begin{cases} 2n, & \text{ако је } n \text{ паран} \\ 3n, & \text{ако је } n \text{ непаран} \end{cases}.$$

а) Одредити $(f \circ g)(2010)$ и $(g \circ f)(2011)$.

б) Одредити $(f \circ g)(n)$ и $(g \circ f)(n)$.

Други разред, Б категорија

1. Видети први задатак за други разред А категорије.

2. Нека су m и n произвољни цели бројеви. Доказати да

$$30 \mid (m^5 n - m n^5).$$

3. Одредити све реалне бројеве λ тако да је број

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda + 1)i}$$

такође реалан.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. У унутрашњости троугла ABC изабрана је тачка P тако да важи

$$\sphericalangle APB = \gamma + 50^\circ,\ \sphericalangle BPC = \alpha + 60^\circ,\ \sphericalangle CPA = \beta + 70^\circ,$$

где је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Одредити углове троугла чија су темена пресеци продужетака дужи AP, BP и CP са кружницом описаним око троугла ABC.

Трећи разред, Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 3t &= 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + 3t &= 0 \\ 3x + 3y + 2z + mt &= 0 \end{aligned}$$

има бесконачно много решења у скупу реалних бројева.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x > 2.$$

4. Око лопте је описана права зарубљена кружна купа. Доказати да је однос запремине лопте и запремине купе једнак односу површине лопте и површине купе.

5. Сваки члан породице Топаловић или увек говори истину или увек лаже. Аксентије, Милутин и Лаки (Милутин је Аксентијев син, а Лаки Милутинов) су дали по једну изјаву везану за њих тројицу:

p: Оба оца или увек говоре истину или оба оца увек лажу.

q: Један син увек лаже, а други син увек говори истину.

r: Изјаве p и q нису обе лажне.

а) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити да ли говори истину или лаже?

б) За кога од њих тројице са сигурношћу можемо утврдити коју је изјаву (од p, q, r) дао?

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $y=\dfrac{(x-1)e^x}{x}$, доказати да је функција

$$xy'+y-xe^x$$

на интервалима на којима је дефинисана константна.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\cos^3 x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\sin^3 x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)>\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3. Видети први задатак за трећи разред Б категорије.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Видети други задатак за трећи разред А категорије.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Први разред, А категорија

1. Да ли постоје природни бројеви a, b, c такви да је

$$2010 = (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)?$$

2. У равни су дате кружнице k_1 и k_2 и права p која сече k_1 у тачкама A и B, а k_2 у тачкама C и D. Пресечне тачке тангенти кружнице k_1 у тачкама A и B са тангентама кружнице k_2 у тачкама C и D су K, L, M и N. Доказати да су K, L, M и N концикличне тачке.

3. Одредити све природне бројеве n такве да је број

$$\left|n-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\right|+\left|3-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\right|$$

рационалан.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AB = BC$) је одабрана тачка M таква да је $\sphericalangle AMC = 2\sphericalangle ABC$. Тачка N на дужи AM задовољава $\sphericalangle BNM = \sphericalangle ABC$. Доказати да је $BN = CM + MN$.

5. Фигура површине веће од 1006 може се сместити у правоугаоник димензија 2011×1. Доказати да постоје две тачке те фигуре (на рубу или унутрашњости) које су на растојању тачно 1.

Други разред, А категорија

1. Пера и Мика играју следећу игру: они наизменично уписују реалне бројеве на место неког од до тада неуписаних коефицијената a, b, c једначине

$$ax^2+bx+c=0.$$

Пера игра први и он добија ако једначина има и једно позитивно и једно негативно решење, а Мика добија у осталим случајевима. Ко од њих двојице има победничку стратегију?

2. Дат је квадрат $ABCD$. Изван квадрата је конструисан полукруг над пречником AB. Одредити тачку P са овог полукруга тако да израз

$$AP^2+CP^2$$

има максималну вредност.

3. Дат је троугао BEC. Над страницама BC и CE са спољашње стране троугла констуисани су квадрати $BCDA$ и $CEFG$. Ако је CK тежишна дуж троугла CBE, а CL висина троугла DCG, доказати да су тачке C, K и L колинеарне.

4. Одредити минималан број коња који се могу поставити на шаховску таблу димензија 7×7 тако да свако поље табле буде тучено неким од њих.

5. Нека је $n > 28$ савршен број дељив са 7. Доказати да је n дељив са 49. (Природан број n је савршен ако је збир свих његових позитивних делилаца мањих од n једнак n. Нпр. 6 је савршен, јер је $1+2+3=6$.)

Трећи разред, А категорија

1. На страници AD правоугаоника $ABCD$ ($AB < BC$) изабрана је тачка E тако да је $BE = BC$. Нормала из темена C на дијагоналу BD сече продужетак странице AB у тачки F. Доказати да је троугао BEF правоугли.

2. Који је највећи број жетона који се могу поставити на шаховску таблу димензија 2012×2012 (на свако поље се поставља највише један жетон) тако да на свакој хоризонтали, вертикали и дијагонали ове табле буде паран број жетона?
(Под дијагоналом шаховске табле подразумевамо низ поља табле чији центри леже на правој која је паралелна са једном од две дијагонале квадрата који чини границу табле. Такође, свако од четири угаона поља табле је дијагонала шаховске табле.)

3. Нека је P раван. Доказати да не постоји пресликавање $f : P \to P$ такво да за сваки конвексан четвороугао $ABCD$ равни P, тачке $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ и $f(D)$ чине темена конкавног четвороугла.
(Величине углова четвороугла су различите од $180°$.)

4. Нека је $A = (2011+i)^{2010} + (2011-i)^{2010}$.

(а) Доказати да је A цео број.

(б) Одредити остатак при дељењу броја A са 101.

5. Низ $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ реалних бројева задовољава $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и

$$2a_n + 3a_{n+2} \leqslant 5a_{n+1}, \text{ за све } n \geqslant 0.$$

Доказати да за све $n \geqslant 0$ важи $a_n \leqslant 3 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$.

Четврти разред, А категорија

1. У троуглу ABC важи:

(1) $DE \parallel AB$, $D \in AC$ и $E \in BC$;

(2) $DF \parallel CB$, $F \in AB$;

(3) $AE \cap DF = \{G\}$ и $CF \cap DE = \{H\}$.

Доказати да је $GH \parallel AC$.

2. Дата је табла димензија 3×4. Два играча наизменично постављају домине на поља табле (свака домина поставља се на два поља) које се не смеју преклапати. Победник је играч који постави последњу домину.

(а) На колико различитих начина се могу поставити две домине?

(б) Колико има различитих позиција након постављене две домине?

(в) Који од играча има добитну стратегију?

(Домине су правоугаоници димензија 1×2. Играчи на располагању имају довољан број домина.)

3. Дато је n тачака $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ на сегменту $[0,1]$. Доказати да постоји тачка $x \in [0,1]$ тако да је просечно растојање од тачке x до тачака $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ једнако $\frac{1}{2}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Дати су произвољни позитивни бројеви $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{2n}$ и њихова произвољна пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$. Доказати да за свако $t \geqslant 0$ важи неједнакост

$$(a_1a_2+t)(a_3a_4+t)\cdot\ldots\cdot(a_{2n-1}a_{2n}+t) \leqslant (b_1b_2+t)(b_3b_4+t)\cdot\ldots\cdot(b_{2n-1}b_{2n}+t).$$

5. Нека су p и q прости бројеви, при чему је $p = 2q+1$. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да важи

$$p \mid q^n + n^q.$$

Први разред, Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$|x-1| - |x-2| + |x-3| = a$$

има тачно четири реална решења?

2. На страницама AB и BC паралелограма $ABCD$ дате су тачке M и N тако да је $AM : MB = 2 : 1$ и $BN : NC = 1 : 1$. Ако је S пресечна тачка дужи AN и DM, наћи однос $AS : SN$.

3. Три друга Аца, Бојан и Вељко погађају непознат шестоцифрен број, састављен од цифара 1,2,3,4,5,6, при чему се ове цифре не понављају. Они дају следеће претпоставке за непознат број:

- Аца: 123456.
- Бојан: 245163.
- Вељко: 463215.

Ако се зна да је Аца погодио тачан положај 3 цифре, Бојан 3 цифре и Вељко 1 цифре, одредити непознати број.

4. Видети први задатак за први разред А категорије.

5. Дат је паралелограм $ABCD$. Нека су $ABB'A'$, $BCC''B''$ и $CDD'C'$ квадрати конструисани у спољашњости овог паралелограма и нека су O_1, O_2 и O_3 њихови центри, редом. Доказати да су троуглови O_1BO_2 и O_3CO_2 подударни.

Други разред, Б категорија

1. На колико начина се може поређати 10 различитих књига на полицу, али тако да за пет одређених важи да никоје две нису једна до друге?

2. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је тачка E у унутрашњости, а тачка F у спољашњости овог квадрата тако да су троуглови ABE и CBF једнакостранични. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне.

3. За реалан број d кажемо да је *добар* ако је за сваки реалан број x испуњено

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leqslant d.$$

а) Доказати да је 4 добар број.

б) Наћи све добре бројеве.

4. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) угао код темена C је 108°. Наћи однос дужине основице и дужине крака.

5. Нека су b и c природни бројеви, а a прост број. Ако је $a^2 + b^2 = c^2$, доказати да је $a < b$.

Трећи разред, Б категорија

1. Око дате лопте описана је права призма чија је основа ромб. Најдужа дијагонала призме гради са равни основе угао α. Наћи оштар угао ромба.

2. Колико има четвороцифрених бројева који се у бројном систему са основом 10 записују помоћу највише две различите цифре?

3. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x-2} + x > 3.$$

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$4^{x\arcsin x}+4^{x\arccos x}=2^{\frac{2+\pi x}{2}}.$$

5. Нека су на крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC изабране тачке M и N, редом. Права која садржи средиште дужи MN и паралелна је основици BC сече краке у тачкама K и L. Доказати да је дужина ортогоналне пројекције дужи MN на основицу троугла једнака дужини дужи KL.

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $\log_{10}2=a$ и $\log_{10}3=b$, одредити $\log_5 216$ у функцији од a и b.

2. Нека је $k>0$, а A и B, редом, тачке пресека параболе $y=x^2$ са правама

$$y=kx \quad \text{и} \quad y=-\left(k+\frac{1}{k}\right)\cdot x$$

различите од координатног почетка O. Одредити (ако постоје) све вредности k за које је троугао OAB оштроугли.

3. Одредити (ако постоји) реалан број a тако да функција

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}, & x\neq 64\\ a, & x=64\end{cases}$$

буде непрекидна за све $x\geqslant 0$.

4. У троуглу ABC је $\sphericalangle ACB=30^\circ$. Означимо са D средиште странице BC, а са E подножје висине из темена A овог троугла. Ако је $\sphericalangle CAD=15^\circ$, одредити величину $\sphericalangle BAE$.

5. Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за 7 већа од најмање цифре?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Први разред, А категорија

1. Перица покушава да пронађе $2n+1$ најмањих узастопних природних бројева, тако да је збир квадрата најмањих $n+1$ бројева једнак збиру квадрата највећих n бројева. Уколико овакви бројеви постоје, Перица их записује у n-ту врсту своје *пирамиде*, а уколико такви не постоје,

n-та врста остаје празна. Након прва три корака ($n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$) Перицина пирамида има следећи изглед

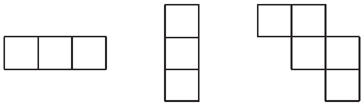
$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2 \\ 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2. \end{aligned}$$

Кажемо да се бројеви 3, 4 и 5 налазе у првој врсти; бројеви 10, 11, 12, 13 и 14 се налазе у другој врсти; бројеви 21, 22, 23, 24, 25, 26 и 27 се налазе у трећој врсти. Уколико Перица настави са прављењем пирамиде на описани начин, да ли ће се у некој врсти наћи број 2011?

2. Нека су H и O редом ортоцентар и центар описане кружнице троугла ABC ($AB \neq AC$). Праве AH и AO секу описану кружницу троугла ABC по други пут у тачкама M и N, редом. Означимо са P, Q, R пресечне тачке правих BC и HN, BC и OM, HQ и OP, редом. Доказати да је четвороугао $AORH$ паралелограм.

3. За природан број кажемо да је *симетричан* ако се у декадном систему исто пише са лева на десно и са десна на лево. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да су бројеви n^2, n^3 и n^4 симетрични, а број n^5 није.

4. За које природне бројеве m и n се правоугаоник димензија $m \times n$ може поплочати (без преклапања) фигурама састављеним од јединичних квадрата као на слици? Фигуре се не могу ротирати или окретати.



Други разред, А категорија

1. Дат је оштроугли троугао ABC са ортоцентром H и центром описаног круга O. Нека симетрала дужи AH сече странице AB и AC у тачкама D и E, редом. Доказати да је A центар споља приписане кружнице троугла ODE.

2. За природан број k, обележимо са $S(k)$ збир цифара броја k. Да ли постоји природан број n за који важи

$$S(n+1) \cdot S(n+2) \cdot \ldots \cdot S(n+2010) \cdot S(n+2011) = S(n)^{2011}\,?$$

3. Одредити све вредности реалног параметра t тако да систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z + v &= 0 \\ xy + yz + zv + t(xz + xv + yv) &= 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. Група разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима $1, 2, \dots, 2011$. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k, $1 < k < 2011$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 2011, онда се премешта у пећину са бројем 2010). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може да пронађе благо у коначно много покушаја?

Трећи разред, А категорија

1. Нека су a_1, a_2, ..., a_n нуле полинома $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Пронаћи најмањи природан број m такав да тачке a_1^m, a_2^m,..., a_n^m у комплексној равни леже на истој правој, ако је:

а) $n = 2011$;

б) $n = 2010$.

2. Матрица 2011×2011 се зове *златна* ако је попуњена бројевима 1, 2, 3, 4 и ако се у сваком квадрату 2×2 сваки од бројева 1, 2, 3, 4 појављује тачно једном. Одредити укупан број златних матрица.

3. Одредити најмањи природан број m такав да се бројеви 1^m, 2^m, ..., 2010^m могу поређати на кружници на такав начин да је збир свака два суседна броја са кружнице дељив са 2011.

4. Нека је D подножје висине из темена A оштроуглог троугла ABC. Уочимо тачке E и F на страници BC такве да је $BD = CE$ и $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAF$. Нека је Q друга пресечна тачка праве AF и круга описаног око $\triangle ABC$. Ако су M и N, редом, средишта страница AB и AC, доказати да се кругови описани око $\triangle ABC$ и $\triangle MNQ$ додирују.

Четврти разред, А категорија

1. Раван је обојена у две боје. Доказати да постоји једнакостраничан троугао странице 1 cm или странице $\sqrt{3}$ cm, код кога су сва три темена обојена истом бојом.

Показати да не мора да постоји и једнакостраничан троугао странице 1 cm код кога су сва три темена обојена истом бојом и једнакостраничан троугао странице $\sqrt{3}$ cm код кога су сва три темена обојена истом бојом.

2. Нека је k кружница описана око оштроуглог троугла ABC, а тачка D дијаметрално супротна тачки A на k. Тангента у A на k и права

BC секу се у тачки P, а права DP поново пресеца k у тачки Q. Нека су M и N, редом, средишта страница AB и AC. Ако је Q' тачка на k таква да је $QQ' || BC$, а X пресечна тачка дужи AQ' и MN, доказати да је $BX = CX$.

3. У зависности од непарног природног броја $n > 1$, одредити остатак при дељењу броја

$$a = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ (i,n)=1}} i$$

бројем n.

4. Нека је дат коначан скуп реалних бројева са особином да се сваки његов елемент може записати као збир неких двају елемената (не обавезно различитих) из истог скупа. За такав скуп кажемо да је *безбедности реда* n ако не садржи подскуп са n или мање елемената чији је укупан збир једнак 0. Доказати да за сваки природан број M, постоји коначан скуп безбедности реда M.

Први разред, Б категорија

1. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Уколико су A_1, B_1, C_1 и D_1 средишта лукова над тетивама AB, BC, CD, DA, редом, који не садрже неку од преосталих тачака, доказати да је $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

2. Одредити цифру јединица и цифру десетица броја

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2011.$$

3. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао, P и Q средишта редом страница BC и EF и тачка T пресек дужи AP и BQ. Одредити $AT : TP$ и $BT : TQ$.

4. У зависности од реалног параметра a одредити сва реална решења једначине

$$3(1 + a + a^2) \cdot x = (1 + a + a^2)^2 \cdot x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1.$$

5. Раван је обојена у две боје. Доказати да постоји троугао са страницама дужина 1 cm, $\sqrt{3}$ cm и 2 cm чија су сва темена исте боје.

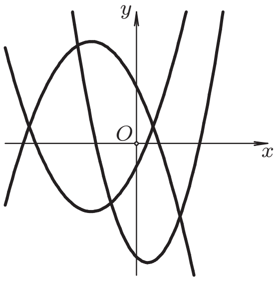
Други разред, Б категорија

1. Доказати да у сваком правоуглом троуглу важи

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2},$$

где су a и b дужине катета, а h дужина хипотенузине висине.

2. На слици су скицирани графици три квадратне функције.



Да ли постоје реални бројеви a, b и c тако да су на слици приказани графици функција $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ и $y = cx^2 + ax + b$?

3. За комплексан број z важи $\left|\dfrac{z+i}{1+z}\right| = 1$. Доказати да је

$$\left|z^{2010} + iz^{2009} + \ldots + i^{2009}z + i^{2010}\right| = \left|z^{2010} + z^{2009} + \ldots + z + 1\right|.$$

4. На колико начина се могу поставити бели и црни скакач на шаховску таблу димензија 8×8 тако да се међусобно не нападају?

5. Перица има 1012 налепница на којима се налазе бројеви 1000, 1001, ..., 2011 (сваки број се налази на једној налепници). Он жели да залепи налепнице (не нужно све) у низ (једну иза друге) тако да добије највећи могући број који је дељив са 99 (ако употреби k налепница, добија број који има укупно $4k$ цифара). Како Перица треба да залепи налепнице да би остварио свој циљ?

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да је број $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ дељив са 56 за свако $n \in \mathbb{N}$.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$2\log_{\frac{1}{2}}\left(4^{\sqrt{x^2-1}} - 1\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(4^{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2}\right) \geqslant -1.$$

3. Дат је четвороугао $ABCD$. Нека је $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$ и P површина четвороугла $ABCD$.

а) Доказати да је

$$16P^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cdot \cos(\beta + \delta).$$

б) Нека је $A'B'C'D'$ тетиван четвороугао коме су дужине страница a, b, c и d. Доказати да је површина четвроугла $A'B'C'D'$ не мања од P.

4. Тачке које одговарају комплексним бројевима a, b, c, a^2, b^2, c^2 (у неком поретку) чине темена правилног шестоугла чији је центар тачка која одговара броју 0. Доказати да је $abc = -1$.

5. Група разбојника скрива своје благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима 1 до 5. Преко дана они остављају благо у једној од ових пећина, а ноћу га премештају у једну од суседних пећина (ако је благо у пећини са бројем k, $1 < k < 5$, премешта се у пећину са бројем $k-1$ или у пећину са бројем $k+1$; ако је у пећини са бројем 1, онда се премешта у пећину са бројем 2; ако је у пећини са бројем 5, онда се премешта у пећину са бројем 4). Али Баба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Али Баба има стратегију којом са сигурношћу може да пронађе благо у коначно много покушаја?

Четврти разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем неједначина

$$\begin{aligned} \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0,25} 3} &< x+4 \\ x \cdot \log_{0,5}(x^2+3x) + \log_3 9^x &> 0. \end{aligned}$$

2. Нека су M и N средишта дужи AB и AC, редом, једнакостраничног троугла ABC и P тачка таква да је N средиште дужи MP. Нека је $ND \perp AP$ $(D \in AP)$ и $ND \cap BC = \{Q\}$. Доказати:

а) $PA \perp AB$;

б) $DQ = \dfrac{3}{4}BC$.

3. Колико решења у скупу природних бројева има једначина

$$x + y + z = 2011$$

таквих да је $x \geqslant 19$ и $y \geqslant 3$?

4. Ако су a, b и n природни бројеви доказати да се број $(a^2+b^2)^n$ може приказати као сума квадрата два цела броја.

5. Нека је a цео број. Одредити нуле полинома $x^3 + ax - 13x + 42$ ако је познато да су све оне цели бројеви.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 22.01.2011.

Први разред, А категорија

1. Како за произвољан троугао XYZ, његово тежиште T и произвољну тачку P важи $\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY}+\overrightarrow{PZ}=3\cdot\overrightarrow{PT}$, то је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3} &= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)\\
&+ \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}\right)+\overrightarrow{OH}.
\end{aligned}$$

По Хамилтоновој формули је $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{HO}$, што завршава наш доказ. (Тангента 61, стр. 35, Писмени задаци)

2. Постоје две могућности, да у једном кавезу буде 5 птица, а у друга два по три, или да у два кавеза буде по четири птице, а у преосталом три.
У првом случају, пет птица за најпунији кавез можемо одабрати на $\binom{11}{5}$ начина. Преостале птице делимо у две групе од по три, што можемо урадити на $\frac{1}{2}\binom{6}{3}$ начина. У другом случају, три птице за најмање пун кавез можемо одабрати на $\binom{11}{3}$ начина. Преостале птице делимо у две групе од по четири, што можемо урадити на $\frac{1}{2}\binom{8}{4}$ начина. Према томе, укупан број распореда је

$$\binom{11}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{6}{3}+\binom{11}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{8}{4}=462\cdot 10+165\cdot 35=10395.$$

3. Посматрајмо део таблице без последње колоне. Овај део таблице се може поделити на $\frac{2010^2}{4}$ дисјунктних квадрата димензије 2×2, па је у овом делу обојено највише $2\cdot\frac{2010^2}{4}$ поља. Дакле, како последња колона саджи 2010 поља, у таблици је обојено највише

$$2\cdot\frac{2010^2}{4}+2010=2010\cdot 1006 \text{ поља.}$$

Приметимо да уколико обојимо сваку другу колону, почевши од прве, добијамо бојење које задовољава услове задатка и у коме је обојено $2010\cdot 1006$ поља, па је тражени број једнак $2010\cdot 1006$.

4. Претпоставимо да тражени бројеви n и m постоје. Како је 2011 прост број, то су сви умношци на левој страни степени броја 2011 или једнаки 1. Зато је $S(n) = 2011^{\alpha}$ и $S(n+1) = 2011^{\beta}$, за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Како за сваки природан број k важи $S(k) \equiv k \pmod 3$, то је

$$1 \equiv (n+1) - n \equiv S(n+1) - S(n) \equiv 2011^{\beta} - 2011^{\alpha} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

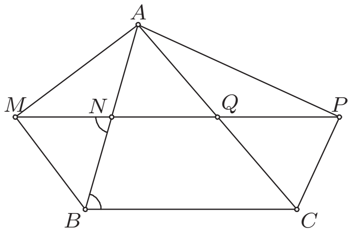
што је контрадикција.

5. Нека су N и Q средишта страница AB и AC, редом. Како је троугао AMB правоугли, а N средиште хипотенузе, то је $MN = NB$, па је $\sphericalangle NMB = \sphericalangle NBM$. Даље, како је BM симетрала спољашњег угла код темена B, то је $\sphericalangle NBM = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ABC$, па је

$\sphericalangle MNB = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle NBM = \sphericalangle ABC.$

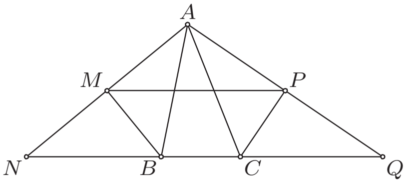
Из последњег је $MN \parallel BC$. Слично је $PQ \parallel BC$. Како је NQ средња линија троугла ABC, то је и $MN \parallel BC$, па су тачке M, N, P и Q колинеарне. Како је $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$, $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$ и $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$, то је

$MP = MN + NQ + QP = \dfrac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA)$, што је и требало доказати. (Тангента 54, стр. 47, Писмени задаци)



ОП 2011 1А 5-1

Друго решење. Нека су пресеци правих AM и AP са правом BC тачке N и Q, редом. За троуглове NBA и QCA важи да су симетрале углова код темена B и C, редом, нормалне на наспрамну страницу, па су ови троуглови једнакокраки.



ОП 2011 1А 5-2

Самим тим, $NB = AB$, $QC = AC$ и тачке M и P су средишта страница AN и AQ, редом. Зато је MP средња линија троугла ANQ и важи

$$MP = \frac{1}{2} \cdot (NB + BC + CQ) = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CA),$$

што је и требало доказати.

Други разред, А категорија

1. а) За $a \neq -2$ су x_1 и x_2 различити од нуле, па израз има смисла. Даље, према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = \dfrac{3a+1}{4}$ и $x_1 x_2 = -\dfrac{a+2}{4}$, па је

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{9a^2 + 14a + 17}{(a+2)^2}.$$

Како је $(a+2)^2 > 0$, услов задатке се своди на $9(9a^2+14a+17)\geqslant 40(a+2)^2$, односно

$$41a^2 - 34a - 7 \geqslant 0.$$

Решења одговарајуће квадратне једначине су $-\frac{7}{41}$ и 1, па је скуп решења последње неједначине $\left(-\infty, -\frac{7}{41}\right] \cup [1, +\infty)$. Како је $a \neq -2$, то је

$$a \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{41}\right] \cup [1, +\infty).$$

б) Нека је $f(x) = 4x^2 - (3a+1)x - a - 2$. Да би оба решења припадала интервалу $(-1, 2)$ довољно је да $f(-1)$ и $f(2)$ буду истог знака, односно $f(-1)\cdot f(2) > 0$, да се x-координата темена параболе налази у интервалу $(-1, 2)$, односно да је $-1 < \dfrac{3a+1}{8} < 2$ и да y-координата темена и $f(-1)$ буду различитог знака, односно $f\left(\dfrac{3a+1}{8}\right) \cdot f(-1) < 0$. Како је $f(-1) = 2a+3$, $f(2) = -7a+12$ и $f\left(\dfrac{3a+1}{8}\right) = -\dfrac{9a^2+22a+33}{16}$, то се последње своди на

$$(2a+3)(-7a+12) > 0, \quad -3 < a < 5, \quad \frac{9a^2+22a+33}{16} \cdot (2a+3) > 0.$$

Из прве неједначине закључујемо да је $-\frac{3}{2} < a < \frac{12}{7}$, а за ове вредности параметра a задовољена је и друга неједначина. Како је дискриминанта квадратног тринома $9a^2 + 22a + 33$ једнака $22^2 - 4 \cdot 9 \cdot 33 < 0$, то је $9a^2 + 22a + 33 > 0$, за све $a \in \mathbb{R}$. Зато свако a из интервала $\left(-\frac{3}{2}, \frac{12}{7}\right)$ задовољава и трећу неједначину, па овај интервал представља решење задатка. (Тангента 62, стр. 36, Писмени задаци)

2. По формули за косинус двоструког угла имамо

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + 10x) + 1}{2} = \frac{-\sin 10x + 1}{2}$$

и слично $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right) = \dfrac{-\sin 8x + 1}{2}$, па се једнакост своди на

$$\sin 8x - \sin 10x = 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos 9x.$$

По формули за разлику синуса је $\sin 8x - \sin 10x = -2 \cdot \sin x \cdot \cos 9x$, па је последња једнакост еквивалентна са $\sin x \cdot \cos 9x \cdot (1 + \sin x) = 0$. Дакле, $\sin x = 0$, $\cos 9x = 0$ или $\sin x = -1$, па је скуп решења $\{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Како је $\left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, то се скуп решења може записати и као

$$\{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

(Тангента 54, стр. 47, Писмени задаци)

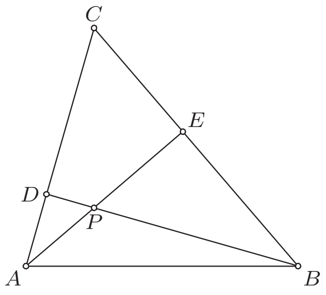
3. Нека су углови код темена A, B и C троугла ABC редом α, β и γ. Тада је из правоуглих троуглова AEB и ADB

$$AE = AB\sin\beta, \quad BD = AB\sin\alpha.$$

Како је $\sphericalangle ABP = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle BAP = 90^\circ - \beta$ и $\sphericalangle APB = \alpha + \beta$, применом синусне теореме на троугао APB добијамо

$$AP = AB\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$BP = AB\cdot\frac{\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = AB\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$



ОП 2011 2А 3

Сада је

$$AP\cdot AE + BP\cdot BD = AB^2\cdot\frac{\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = AB^2,$$

што је и требало доказати.

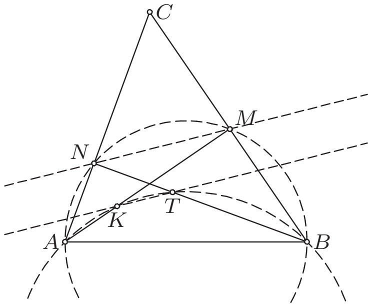
4. Приметимо да је $1+2+\cdots+50 = \dfrac{50\cdot 51}{2} = 1275$ и $\dfrac{1275-1}{2} = 637$. Поделимо све подскупове скупа $\{1,2,\ldots,50\}$ у парове: сваки подскуп је у пару са својим комплементом. Приметимо да у сваком пару тачно један од подскупова има суму елемената већу од 637. Према томе, постоји укупно $\dfrac{1}{2}\cdot 2^{50} = 2^{49}$ тражених подскупова.

5. Претпоставимо да је $\sphericalangle ACB > 45^\circ$ (случај $\sphericalangle ACB < 45^\circ$ се аналогно решава). Како је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB = 90^\circ$ тачке A, N, M и B су концикличне. Самим тим,

$$\begin{aligned}\sphericalangle AMN &= \sphericalangle ABN \quad (\text{над } AN)\\ \sphericalangle MAN &= \sphericalangle MBN \quad (\text{над } MN).\end{aligned}$$

Даље, како су троуглови ANT и BKM једнакокрако-правоугли, то је

$$\begin{aligned}\sphericalangle TAK &= \sphericalangle TAN - \sphericalangle MAN\\ &= 45^\circ - \sphericalangle MBN\\ &= \sphericalangle KBT,\end{aligned}$$



ОП 2011 2А 5

па су тачке A, K, T и B концикличне. Самим тим, $\sphericalangle AKT + \sphericalangle ABT = 180^\circ$, па је

$$\sphericalangle TKM = 180^\circ - \sphericalangle AKT = \sphericalangle ABT = \sphericalangle ABN = \sphericalangle AMN.$$

Из последњег је јасно $KT \parallel MN$.

Трећи разред, А категорија

1. Број непарних бројева написаних на табли се не мења ако су избрисана два броја различите парности или ако су избрисана два парна броја, док се смањује за 2 ако су избрисана два непарна броја. Дакле, парност броја непарних бројева на табли је инваријанта (не мења се) применом задатог поступка. Како је на почетку било 15 непарних бројева, закључујемо да ће последњи број на табли бити непаран. (Тангента 57, стр. 13, Наградни задаци, М804)

2. Из синусних теорема за троугао ABC, односно $A'B'C'$, је

$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle ACB}=\frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC}=\frac{CA}{\sin\sphericalangle CBA},$$

односно

$$\frac{A'B'}{\sin\sphericalangle A'C'B'}=\frac{B'C'}{\sin\sphericalangle B'A'C'}=\frac{C'A'}{\sin\sphericalangle C'B'A'},$$

па је довољно доказати

$$2\cdot\sin\sphericalangle BAC\cdot\sin\sphericalangle B'A'C'\geqslant\sin\sphericalangle ABC\cdot\sin\sphericalangle A'B'C'+\sin\sphericalangle ACB\cdot\sin\sphericalangle A'C'B'.$$

Нека је $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle A'B'C'=\beta'$, $\sphericalangle ACB=\gamma$, $\sphericalangle A'C'B'=\gamma'$. Из услова задатка последње се своди на

$$\frac{3}{2}\geqslant\sin\beta\cdot\sin\beta'+\sin\gamma\cdot\sin\gamma'=S.$$

Даље, коришћењем тригонометријских идентитета и $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'=120^\circ$, добијамо

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\cos(\beta-\beta')-\cos(\beta+\beta')+\cos(\gamma-\gamma')-\cos(\gamma+\gamma')}{2}\\
&= \cos(\beta-\beta')-\cos\frac{\beta+\beta'+\gamma+\gamma'}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\beta'-\gamma-\gamma'}{2}\\
&= \cos(\beta-\beta')-\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\beta'-\gamma-\gamma'}{2}\leqslant\frac{3}{2},
\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

3. Докажимо прво да је у сваком кораку на табли записан полином степена највише два. Нека је на табли записан квадратни трином $f(x)=ax^2+bx+c$. Тада је

$$x^2\cdot f\left(1+\frac{1}{x}\right)=(a+b+c)x^2+(b+2a)x+a$$

и

$$(x-1)^2\cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right)=cx^2+(b-2c)x+(a-b+c).$$

Даље, приметимо да је

$$(b+2a)^2-4a(a+b+c)=(b-2c)^2-4c(a-b+c)=b^2-4ac,$$

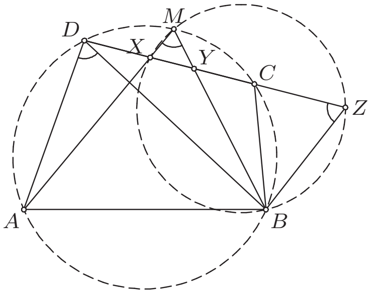
па после сваког корака полином записан на табли има дискриминанту $2010^2-4\cdot 2011$ (узимамо да је дискриминатна полинома $ax+b$ једнака a^2, а константног полинома 0). Како је дискриминанта полинома $x^2+2011x+2010$ једнака $2011^2-4\cdot 2010$, он не може бити записан на табли.

4. На правој CD доцртамо тачку Z, тако да важи $\sphericalangle BZC=\sphericalangle ADB$. Због једнакости углова над тетивом AB добијамо да је $\sphericalangle ADB=\sphericalangle AMB$, па је четвороугао $MXBZ$ тетиван. Из потенције тачке Y у односу на ова два круга добијамо

$$YM\cdot YB=XY\cdot YZ,$$

односно

$$YM\cdot YB=YD\cdot YC.$$



ОП 2011 ЗА 4

На основу претходних једнакости добијамо

$$DX\cdot CY=(DY-XY)\cdot CY=XY\cdot YZ-XY\cdot YC=XY\cdot CZ,$$

па је дати израз једнак CZ и не зависи од избора тачке M. (Тангента 54, стр. 20, Наградни задаци, М755)

Друго решење. Уведимо комплексну раван, тако да је круг описан око четвороугла $ABCD$ јединични. Нека тачкама одговарају комплексни бројеви означени одговарајућим малим словима. По формули за пресек тетива јединичног круга имамо

$$x=\frac{am(c+d)-cd(a+m)}{am-cd},\qquad y=\frac{bm(c+d)-cd(b+m)}{bm-cd}.$$

Сада је

$$x-d=\frac{am(c+d)-cd(a+m)}{am-cd}-d=\frac{c(am+d^2-da-dm)}{am-cd}=\frac{c(a-d)(m-d)}{am-cd},$$

и аналогно $y-c=\dfrac{d(b-c)(m-c)}{bm-cd}$. Такође,

$$\begin{aligned} x-y &= \frac{cdm^2(a-b)-cdm(c+d)(a-b)+c^2d^2(a-b)}{(am-cd)(bm-cd)} \\ &= \frac{cd(a-b)(m-c)(m-d)}{(am-cd)(bm-cd)}, \end{aligned}$$

па је $\dfrac{DX\cdot CY}{XY}=\left|\dfrac{(a-d)(b-c)}{a-b}\right|=\dfrac{AD\cdot BC}{AB}$, што не зависи од тачке M.

5. а) Претпоставимо да овај низ садржи барем два потпуна квадрата и нека је $mp^k+1=a^2$ и $mp^l+1=b^2$, где је $k<l$, а $a,b\in\mathbb{N}$. Из ових једнакости добијамо

$$(a^2-1)p^{2s}=b^2-1, \tag{$*$}$$

где је $l-k=2s$. Како је НЗД$\,(b-1,b+1)$ једнако 1 или 2, то за $p\neq 2$ важи $p^{2s}\mid b-1$ или $p^{2s}\mid b+1$. Уколико је $p=2$, тада је a^2-1 дељиво са 2, па опет $2^{2s}\mid b-1$ или $2^{2s}\mid b+1$. Самим тим, у оба случаја мора бити $b+1\geqslant p^{2s}$.
Једнакост $(*)$ је даље еквивалентна са $a^2p^{2s}-b^2=p^{2k}-1$, односно

$$(ap^s-b)(ap^s+b)=p^{2s}-1,$$

па $ap^s+b\mid p^{2s}-1$. Међутим, $ap^s+b>b\geqslant p^{2s}-1$, контрадикција.

б) Не. Нека је $p=2$ и $m=2$. Како је $2\cdot 2^{2k+1}+1\equiv 2 \pmod 3$, то је сваки члан низа конгруентан са 2 по модулу 3, па не може бити потпун квадрат.

Четврти разред, А категорија

1. Област дефинисаности функције је $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Одредимо извод функције у овој области:

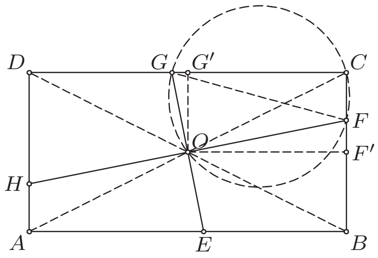
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{arctg} x)' + \left(\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\right)' + 2\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}-2\cdot\frac{1}{1+x^2}=0, \end{aligned}$$

што доказује да је функција заиста константа на сваком од интервала $(-\infty,0)$, $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Како је $f(-1)=-\frac{\pi}{4}+0-2\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$, $\lim_{x\to 0_+}f(x)=0+\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$ и $\lim_{x\to 1_+}f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$, то је

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, & x\in(-\infty,0)\\ \frac{5\pi}{4}, & x\in(0,1)\\ \frac{\pi}{4}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

(Тангента 61, стр. 34, Писмени задаци)

2. Нека је O тачка пресека дијагонала ромба $EFGH$. Како је $\sphericalangle FOG=90^\circ$, то је због $\sphericalangle FOG+\sphericalangle FCD=180^\circ$, четвороугао $FCGO$ тетиван. Зато је $\sphericalangle FOC=\sphericalangle FGC$, као углови над заједничком тетивом FC. Аналогним разматрањем добијамо да је и $\sphericalangle HOA=\sphericalangle HEA$. Даље, $\sphericalangle FGC=\sphericalangle HEA$, као углови са паралелним крацима, па је због показаних једнакости и $\sphericalangle FOC=\sphericalangle HOA$. Самим тим, тачке A, O и C су колинеарне. Аналогно, тачке B, O и D су колинеарне, па је O пресек дијагонала правоугаоника $ABCD$.



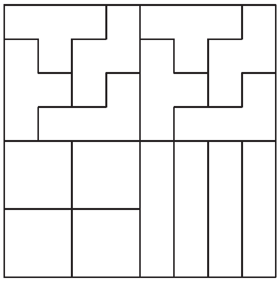
ОП 2011 4А 2

Нека су тачке F' и G', редом, подножја нормала конструисаних из тачке O на странице BC и CD. Троуглови $\triangle OF'F$ и $\triangle OG'G$ су слични (имају једнаке све углове), па је $\dfrac{OF}{OG} = \dfrac{OF'}{OG'} = \dfrac{AB}{BC} = 2$, па је

$$P = 2 \cdot OF \cdot OG = OF^2.$$

Како је растојање тачке O од произвољне тачке са странице BC бар 1, а не већа од половине дијагонале правоугаоника, то је $1 \leqslant P = OF^2 \leqslant \dfrac{5}{4}$, што је и требало доказати.

3. Нека је $n \times n$ највећи квадрат који се може поплочати. Укупна површина свих расположивих фигурица је 100, те је $n^2 \leqslant 100$, односно $n \leqslant 10$. Уз то, како је површина сваке фигурице 4, имамо да $4 \mid n^2$, односно n је паран број. Докажимо да није могуће поплочати квадрат странице 10. Претпоставимо супротно. Ако јединична поља квадрата 10×10 обојимо наизменично црном и белом бојом (шаховски), онда и црних и белих поља има по 50. Приметимо да свака фигурица, осим треће наведене, прекрива по два црна и два бела поља. Трећа фигурица прекрива три поља једне и једно поље друге боје.



ОП 2011 4А 3

Нека је x фигурица које прекривају 3 црна и једно бело поље, а $y = 5 - x$ фигурица које прекривају 3 бела и једно црно поље. Како је разлика броја прекривених црних и бели поља једнака нули, мора бити $(3x + y) - (3y + x) = 0$. Међутим, из последњег добијамо $x = \dfrac{5}{2}$, што није могуће.
Слика са десне стране показује да се квадрат странице 8 може поплочати, па је тражена највећа површина једнака 64.

4. Ако број $ab + 1$ дели $X = a^3 + 3ab^2 + 2$ и $Y = 3b^4 - 2b^3 + 3$, онда дели и број

$$b^3X + Y = (ab)^3 + 3b^4(ab + 1) + 3.$$

Број $(ab)^3 + 1$ је дељив са $ab + 1$, јер је $(ab)^3 + 1 = (ab + 1)((ab)^2 - ab + 1)$, па добијамо $ab + 1 \mid 2$. Зато је $ab + 1 \leqslant 2$, па (a, b) може бити само пар $(1, 1)$. Провера показује да $(a, b) = (1, 1)$ јесте решење.

5. Доказаћемо прво да у сваком троуглу важи

$$\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_b^2}=\frac{R+2r}{2Rr}, \qquad (*)$$

где су h_a, h_b и h_c одговарајуће висине.
Ако са S обележимо површину, са p полуобим, а са α, β и γ углове троугла, тада из идентитета $\dfrac{h_a}{l_a}=\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$, $ah_a=2S=2pr$, $a=2R\sin\alpha$ добијамо

$$\begin{aligned}\frac{h_a}{l_a^2} &= \left(\frac{h_a}{l_a}\right)^2\cdot\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2pr}\cdot\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{R\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{pr}\\ &= \frac{R}{2pr}\cdot\left(\sin\alpha+\frac{\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

па је $L=\dfrac{h_a}{l_a^2}+\dfrac{h_b}{l_b^2}+\dfrac{h_c}{l_b^2}=\dfrac{R}{2pr}\cdot[(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)+(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma)]$.
Сада, користећи идентитете $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{p}{R}$, $4\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{r}{R}$ и $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=32\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, који важе за углове троугла, добијамо једнакост $(*)$.
Даље, применом неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског на тројке $\left(\dfrac{\sqrt{h_a}}{l_a},\dfrac{\sqrt{h_b}}{l_b},\dfrac{\sqrt{h_c}}{l_c}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{h_a}},\dfrac{1}{\sqrt{h_b}},\dfrac{1}{\sqrt{h_c}}\right)$, добијамо

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)^2 &\leqslant \left(\frac{h_a}{l_a^2}+\frac{h_b}{l_b^2}+\frac{h_c}{l_b^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\\ &= \frac{R+2r}{2Rr}\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),\end{aligned}$$

па како је $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{a+b+c}{2S}=\dfrac{1}{r}$, то тражена неједнакост заиста важи.
Једнакост важи ако и само ако је $\dfrac{l_a}{h_a}=\dfrac{l_b}{h_b}=\dfrac{l_c}{h_b}$, односно ако и само ако је $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}=\cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Последње је еквивалентно са $|\alpha-\beta|=|\beta-\gamma|=|\gamma-\alpha|$. Нека је без умањења општости γ највећи од ова три угла. Тада из $\gamma-\alpha=\gamma-\beta$ добијамо $\alpha=\beta$, па је и $\gamma=\alpha$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је троугао једнакостраничан. (Тангента 61, стр. 17, Наградни задаци, M903)

Први разред, Б категорија

1. Из првог услова је $B \subseteq \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, из другог $a \in B$, а из последњег $\{d,e,f,g,h\} \subseteq B$. Из трећег услова $c \notin B$ и $i \notin B$. Из прва два услова закључујемо да се b налази у тачно једном од скупова A и B, што заједно са четвртим условом даје $b \in A$ и $b \notin B$. Значи $B = \{a,d,e,f,g,h\}$, па је $A = \{a,b,c,i\}$.
(Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци)

2. Таблица релације дата је са десне стране. Можемо приметити да уколико је $a\,\rho\,b$, да је $a = 25$. Самим тим, ρ није рефлексивна, а јесте антисиметрична и транзитивна. Како је $25\,\rho\,53$, то релација није симетрична.

ρ	25	53	71	74
25	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
53	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
71	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
74	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

ОП 2011 1Б 2

(Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци)

3. Како Ана мора седети до Бојана, а Весна до Горана, потребно је распоредити 16 људи и 2 пара, односно укупно 18 „група”. При томе у свакој од две групе са по два члана имамо 2 различита распореда, па је тражени број распореда једнак $2 \cdot 2 \cdot 18!$.

4. Нека је $x = 5^{20} \cdot 20^5$. Како је $x = 5^{20} \cdot 4^5 \cdot 5^5 = 2^{10} \cdot 5^{25} = 10^{10} \cdot 5^{15}$, то је последњих 10 цифара броја x једнако нули, док су преостале три непознате цифре последње три цифре броја 5^{15}. Приметимо да важи $5^{15} - 5^3 = 5^3(5^{12} - 1) = 5^3(25^6 - 1)$. Како 25^6 даје остатак 1 при дељењу са 8, то $8 \mid 25^6 - 1$, па $1000 \mid 5^{15} - 5^3$. Зато су последње три цифре броја 5^{15} исте као и последње три цифре броја 5^3, односно преостале три цифре су редом 1, 2 и 5.

5. а) По дефиницији функција f и g је $(f \circ g)(2010) = f(g(2010)) = f(4020) = 4021$ и $(g \circ f)(2011) = g(f(2011)) = g(2010) = 4020$.
б) Потребно је размотрити два случаја:
1° n паран. Тада је $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n + 1$ и $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = 3(n + 1)$ (последња једнакост важи јер је $n + 1$ непаран).
2° n непаран. Тада је $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(3n) = 3n - 1$ (последња једнакост важи јер је $3n$ непаран) и $(g\circ f)(n) = g(f(n)) = g(n-1) = 2(n-1)$ (последња једнакост важи јер је $n - 1$ паран).
Дакле, $(f \circ g)(n) = \begin{cases} 2n+1, & 2 \mid n \\ 3n-1, & 2 \nmid n \end{cases}$, $(g \circ f)(n) = \begin{cases} 3(n+1), & 2 \mid n \\ 2(n-1), & 2 \nmid n \end{cases}$.
(Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци)

Други разред, Б категорија

1. Видети први задатак за други разред А категорије.

2. Довољно је доказати да је $A = m^5n - mn^5 = mn(m^4 - n^4)$ дељиво са 30, односно са 2, 3 и 5.
Уколико је m или n дељиво са 2, тада је mn, па и A, дељиво са 2. Уколико су m и n непарни, тада су и m^4 и n^4 непарни, па је $m^4 - n^4$ паран, а самим тим и A дељив са 2.
Уколико је m или n дељиво са 3, тада је mn, па и A, дељиво са 3. Уколико m и n нису дељиви са 3, тада m^2 и n^2 дају остатак 1 при дељењу са 3, па је $m^4 - n^4 = (m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$ дељиво са 3. Самим тим је и A дељиво са 3.
Уколико је m или n дељиво са 5, тада је mn, па и A, дељиво са 5. Нека зато m и n нису дељиви са 5. Четврти степен броја који није дељив са 5 мора давати остатак 1 при дељењу са 5 (важи $(5k + l)^4 \equiv l^4 \pmod 5$, а $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ и $4^4 = 256$), па $5 \mid m^4 - n^4$, а зато и $5 \mid A$.
(Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци)

3. Важи

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda + 1)i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\lambda + (\lambda + 1)i} \cdot \frac{\lambda - (\lambda + 1)i}{\lambda - (\lambda + 1)i} = \frac{\lambda - (\lambda + 1)\sqrt{3} - (\lambda\sqrt{3} + \lambda + 1)i}{\lambda^2 + (\lambda + 1)^2}.$$

Како је λ реалан број, потребан и довољан услов да последњи број буде реалан је $\lambda\sqrt{3} + \lambda + 1 = 0$, односно $\lambda = -\dfrac{1}{1 + \sqrt{3}}$.
(Тангента 61, стр. 32, Писмени задаци)

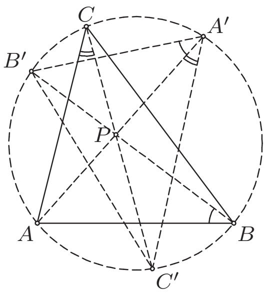
4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Нека су A', B', C' тачке пресека продужетака дужи AP, BP и CP са кружницом описаним око троугла ABC, редом. Тада важи

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABB' &= \sphericalangle AA'B' \text{ (над } AB')\\ \sphericalangle ACC' &= \sphericalangle AA'C' \text{ (над } AC'), \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} \sphericalangle B'A'C' &= \sphericalangle ABB' + \sphericalangle ACC'\\ &= \alpha - \sphericalangle B'BC + \gamma - \sphericalangle C'CB. \end{aligned}$$



ОП 2011 2Б 5

Како је $\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta$, а $\sphericalangle B'BC + \sphericalangle C'CB = 180^\circ - \sphericalangle BPC$, то је

$$\sphericalangle B'A'C' = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \sphericalangle BPC) = \sphericalangle BPC - \beta = 60^\circ.$$

Аналогно добијамо да је $\sphericalangle A'B'C' = 70^\circ$ и $\sphericalangle A'C'B' = 50^\circ$, па су углови троугла $A'B'C'$ једнаки 50°, 60° и 70°.

Трећи разред, Б категорија

1. Уколико прву једначину помножимо редом са $-\frac{3}{2}$, -1 и $-\frac{3}{2}$ и додамо другој, трећој и четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{llllll} 2x & +3y & +2z & & +3t & = 0 \\ & -\dfrac{5}{2}y & & & -\dfrac{5}{2}t & = 0 \\ & -y & +z & & & = 0 \\ & -\dfrac{3}{2}y & -z & + & \left(m-\dfrac{9}{2}\right)t & = 0. \end{array}$$

Уколико сада помножимо другу једначину редом са $-\frac{2}{5}$ и $-\frac{3}{5}$ и додамо трећој и четвртој једначини, добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{lllll} 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & -\dfrac{5}{2}y & & -\dfrac{5}{2}t & = 0 \\ & & z & +t & = 0 \\ & & -z & +(m-3)\,t & = 0. \end{array}$$

Уколико сада четвртој једначини додамо трећу, добијамо

$$\begin{array}{lllll} 2x & +3y & +2z & +3t & = 0 \\ & -\dfrac{5}{2}y & & -\dfrac{5}{2}t & = 0 \\ & & z & +t & = 0 \\ & & & (m-2)\,t & = 0. \end{array}$$

Уколико је $m \neq 2$, тада је $t = 0$, па из преосталих једначина добијамо $z = y = x = 0$, тј. систем има јединствено решење.
Уколико је $m = 2$, тада је $t = \alpha$, где је α произвољан реалан број. Из преосталих једначина добијамо $z = -\alpha$, $y = -\alpha$ и $x = \alpha$, па систем има бесконачно много решења.
Дакле, систем има бесконачно много решења ако и само ако је $m = 2$.
(Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци)

2. Видети други задатак за други разред А категорије.

3. Услови дефинисаности датог израза су

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad x^3 + 1 > 0, \qquad x + 1 > 0, \qquad x + 1 \neq 1.$$

Приметимо да уколико је $x > 0$ и $x \neq 1$, да су и преостали услови задовољени. Дата неједначина је еквивалентна са

$$0 < \log_x(x^3+1) \cdot \frac{1}{\log_x(x+1)} - 2 = \frac{\log_x \frac{x^3+1}{(x+1)^2}}{\log_x(x+1)} = \frac{\log_x \frac{x^2-x+1}{x+1}}{\log_x(x+1)}.$$

Потребно је размотрити следећа два случаја:

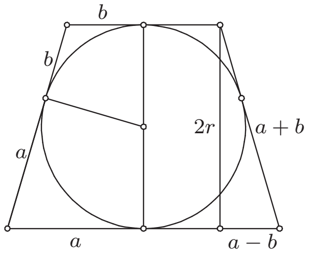
1° $x > 1$. Тада је $\log_x(x+1) > 0$, па је неједначина еквивалентна са $\log_x \dfrac{x^2-x+1}{x+1} > 0$, односно са $\dfrac{x^2-x+1}{x+1} > 1$. Како је $x+1>0$, последње је еквивалентно са $x\cdot(x-2) > 0$. Дакле, у овом случају скуп решења је $(2,+\infty)$.
2° $0 < x < 1$. Тада је $\log_x(x+1) < 0$, па је неједначина еквивалентна са $\log_x \dfrac{x^2-x+1}{x+1} < 0$, односно са $\dfrac{x^2-x+1}{x+1} > 1$. Како је $x+1 > 0$, последње је еквивалентно са $x\cdot(x-2) > 0$. Дакле, у овом случају нема решења.
Из 1° и 2° закључујемо да је скуп решења $(2,+\infty)$.
(Тангента 54, стр. 46, Писмени задаци)

4. Пресек дате зарубљене купе и равни која пролази кроз центре основа и нормална је на основе је једнакокраки трапез у који се може уписати круг.

Нека су a и b редом полупречници веће и мање основе купе, а r полупречник лопте уписане у ову купу. Тада су основе трапеза $2a$ и $2b$, а висина $2r$. Како је трапез тангентни, то је дужина његовог крака једнака $a+b$. Сада је из Питагорине теореме

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + (2r)^2,$$

односно $r^2 = ab$.



ОП 2011 3Б 4

Даље, запремина купе је $V_K = \dfrac{2r(a^2+ab+b^2)\pi}{3}$, а лопте $V_L = \dfrac{4r^3\pi}{3}$, па је однос запремина

$$\frac{V_K}{V_L} = \frac{a^2+ab+b^2}{2r^2} = \frac{a^2+ab+b^2}{2ab}.$$

Како је дужина крака трапеза једнака $l = a+b$, то је површина купе $P_K = (a^2+b^2+(a+b)l)\pi = 2(a^2+ab+b^2)\pi$, а површина лопте $P_L = 4r^2\pi = 4ab\pi$, па је однос површина

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{a^2+ab+b^2}{2ab} = \frac{V_K}{V_L},$$

што је и требало доказати.

5. Приметимо да су Аксентије и Милутин очеви, а Милутин и Лаки синови.

Означимо са A исказ „Аксентије говори истину” (тада је $\neg A$ =„Аксентије лаже”), са M исказ „Милутин говори истину” и са L исказ „Лаки говори истину”. Тада су дате изјаве:

$$\begin{aligned} p &= A \Leftrightarrow M, \\ q &= M \veebar L, \\ r &= p \vee q. \end{aligned}$$

Представимо таблицом ове исказе (0 ако је исказ лажан, а 1 ако је истинит), а затим одредимо и истинитосну вредност изјава p, q, r:

A	M	L	p	q	r	
0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	1	1	
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	1	1	←
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	0	1	

Изјаве p, q, r су дали Аксентије, Милутин и Лаки, па је и њихова истинитосна вредност једнака са A, M, L (не мора тим редоследом!), а видимо да се лева и десна страна поклапају само у 6. врсти (означена стрелицом у претходној таблици).
а) На основу претходног можемо закључити да Милутин лаже, док Аксентије и Лаки увек говоре истину.
б) Само за Милутина знамо да је изјавио p.

Четврти разред, Б категорија

1. Функција y је дефинисана за $x \neq 0$ и на области дефинисаности важи

$$y' = \left(e^x - \frac{e^x}{x}\right)' = e^x - \frac{e^x(x-1)}{x^2} = e^x \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x^2},$$

па је

$$xy' + y - xe^x = e^x \cdot \frac{x^2 - x + 1}{x} + e^x \cdot \frac{x-1}{x} + e^x \cdot x = 0.$$

(Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци)

2. Како је $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 3x$, а из адиционих формула

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \sin 3x &= \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x \\ &= 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot (1 - 2\sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x, \end{aligned}$$

то је полазна неједначина еквивалента са

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} < 3 \cdot \sin x \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x = 3 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{3}{4} \cdot \sin 4x.$$

Из последњег је $\sin 4x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је скуп решења

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right).$$

(Тангента 62, стр. 40, Писмени задаци)

3. Видети први задатак за трећи разред Б категорије.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Видети други задатак за трећи разред А категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.02.2011.

Први разред, А категорија

1. Претпоставимо да овакви бројеви постоје. Како је $2010 = 30\cdot 67$, а 67 прост, барем један од бројева $a+b$, $b+c$ и $c+a$ мора бити дељив са 67. Без умањења општости можемо претпоставити да је $b+c$ дељиво са 67, а самим тим и $b+c\geqslant 67$ (b и c су природни бројеви). Даље, $(a+b)(c+a)$ дели 30, па је $a+b\leqslant 30$ и $c+a\leqslant 30$. Међутим, тада је

$$67\leqslant b+c<a+b+c+a\leqslant 60$$

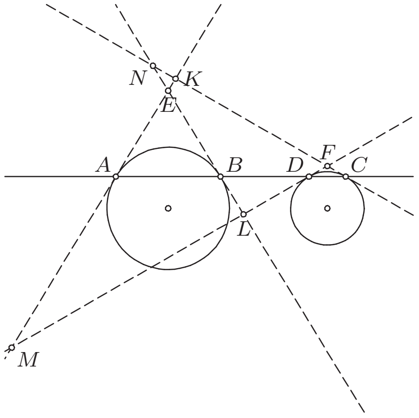
што је контрадикција, па овакви бројеви не постоје.

2. Нека су t_a и t_b тангенте на кружницу k_1 у тачкама A и B, редом, а t_c и t_d тангенте на кружницу k_2 у тачкама C и D, редом.

Нека је $t_a\cap t_c=\{K\}$, $t_b\cap t_d=\{L\}$, $t_a\cap t_d=\{M\}$, $t_b\cap t_c=\{N\}$, $t_a\cap t_b=\{E\}$ и $t_c\cap t_d=\{F\}$.
Приметимо да је

$$\begin{aligned}\sphericalangle NKM &= \sphericalangle KCD+\sphericalangle KAB,\\ \sphericalangle NLM &= \sphericalangle DBL+\sphericalangle BDL.\end{aligned}$$

Сада, како је $\sphericalangle DBL=\sphericalangle ABE=\sphericalangle KAB$ (троугао AEB је једнакокраки) и $\sphericalangle BDL=\sphericalangle FDC=\sphericalangle KCD$ (троугао DFC је једнакокраки), то је $\sphericalangle MKN=\sphericalangle NLM$. Из последњег закључујемо да су тачке K, L, M и Nконцикличне, што је и требало доказати.



ОК 2011 1А 2

3. Приметимо да је $2 < \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+3}} = 3$.
Размотримо зато следећа два случаја:
1° $n \leqslant 2$. Из претходног закључујемо да је дати израз једнак $3-n \in \mathbb{Z}$, па су $n=1$ и $n=2$ решења задатка.

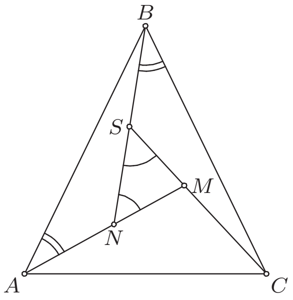
2° $n \geqslant 3$. У овом случају израз је једнак $n+3-2\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, што је цео број ако и само ако је $2\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ цео број. Докажимо да ово не важи, тачније да је $\alpha = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ ирационалан број. Претпоставимо супротно, тј. да је $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тада је $\alpha^2 = 6+\sqrt{6+\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}$, па је $\beta = \sqrt{6+\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}$. Даље, $\beta^2 = 6+\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, па је $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, што није тачно.
Дакле, једина решења су $n=1$ и $n=2$.
(Тангента 62, стр. 38, Писмени задаци)

4. Нека је $CM \cap BN = \{S\}$. Тада
$\sphericalangle MSN = \sphericalangle AMC - \sphericalangle BNM = \sphericalangle ABC$,
и према томе $MN = MS$. Осим тога важи

$$\begin{aligned}\sphericalangle CBS &= \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABN\\ &= \sphericalangle BAN\\ \sphericalangle BCS &= \sphericalangle ABC - \sphericalangle SBC\\ &= \sphericalangle ABN,\end{aligned}$$

што заједно са $AB = BC$ даје да су троуглови ABN и BCS подударни. Следи да је

$$BN = CS = CM + MS = CM + MN.$$



ОК 2011 1А 4

5. Транслирамо дату фигуру F за вектор $\overrightarrow{v}$ дужине 1 паралелан дужој страници правоугаоника. F и добијена фигура G имају збир површина већи од 2012. Ако дуже странице правоугаоника проширимо за 1 у смеру вектора $\overrightarrow{v}$, добијамо правоуганик 2012×1 у којем ће бити садржане обе фигуре F и G. Како је површина тог правоугаоника 2012, те две фигуре имају бар једну заједничку тачку, рецимо Y. Пошто $Y \in G$, та тачка је добијена транслацијом неке тачке $X \in F$ за вектор $\overrightarrow{v}$. Дакле, тачке X и Y припадају датој фигури F и на растојању су тачно 1.

Други разред, А категорија

1. Докажимо да Пера увек може победити.
Пера уписије прво $b = 0$. Даље, могућа су два случаја:

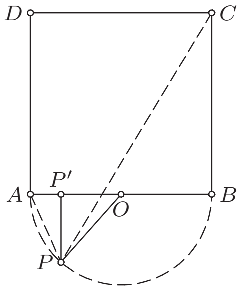
1° Мика уписује ненула број, тј. уписује $c = m \neq 0$, односно $a = m \neq 0$. Тада Пера уписује $a = -m$, односно $c = -m$ и тада је $D = b^2 - 4ac \geqslant -4ac > 0$, па квадратна једначина има 2 различита реална решења x_1 и x_2. Из Виетових правила имамо да је $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1 < 0$, те су она супротног знака и Пера добија.

2° Мика уписује 0 на неко од преосталих места. Тада Пера уписује 0 на преостало место чиме се добили једначину $0 = 0$, која има бесконачно много решења, од којих је једно нпр. 1, а друго -1, па Пера поново добија.

2. Без губљења општости претпоставимо да је квадрат странице 2. Нека је O средиште странице AB, $\sphericalangle AOP = x$ и P' подножје нормале из P на AB. Тада је из Питагорине теореме

$$\begin{aligned} AP^2 &= AP'^2 + PP'^2 \\ &= (1-\cos x)^2 + \sin^2 x \\ &= 2 - 2\cos x \\ CP^2 &= (PP' + BC)^2 + BP'^2 \\ &= (2+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2 \\ &= 6 + 4\sin x + 2\cos x, \end{aligned}$$

па је $AP^2 + CP^2 = 8 + 4\sin x$.



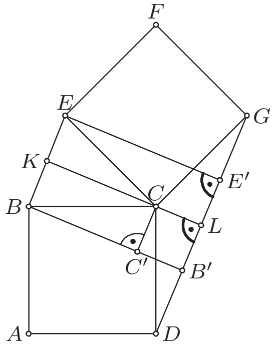
ОК 2011 2А 2

Последњи израз је максималан када је $x = \dfrac{\pi}{2}$, тј. када је P средиште лука над AB.
(Тангента 58, стр. 8, M842)

3. Нека су тачке B' и E' подножја нормала из тачака B и E на праву DG, редом. Нека је тачка C' подножје нормале из C на праву BB'. Како је $\sphericalangle BC'C = \sphericalangle DLC = 90°$, $\sphericalangle C'BC = \sphericalangle LDC$ (углови са нормалним крацима) и $BC = DC$ (странице квадрата $ABCD$), то је

$$\triangle BCC' \cong \triangle DCL,$$

па је $CC' = CL$. Четвороугао $CC'B'L$ је правоугаоник, па је из претходног $B'L = CL$.



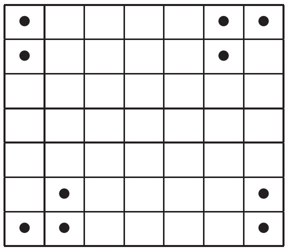
ОК 2011 2А 3

Аналогно добијамо и да је $E'L = CL$, па је $B'L = E'L$. Самим тим, како су праве CL, BB' и EE' паралелне, а L средиште дужи $B'E'$, то је пресек правих CL и BE тачка K, што је и требало доказати.

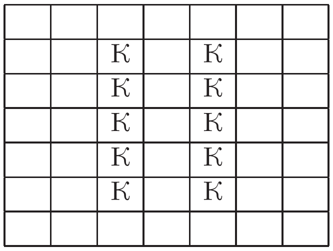
4. Обележимо поља табле паровима из скупа

$$\{A, B, C, D, E, F\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Уочимо десет поља $A1, A6, A7, B1, B2, E6, E7, G1, G2, G7$ (која су означена на слици лево). Сваки коњ на табли може да туче највише једно од ових поља, па на таблу морамо поставити барем 10 коња. 10 коња постављених као на слици десно испуњавају услове задатка, па је тражени број једнак 10.



ОК 2А 4а



ОК 2А 4б

5. Претпоставимо да је $n = 7q = 7p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$, где су $p_1, \ldots, p_k$ различити прости бројеви који нису једнаки 7. Тада је збир свих делилаца броја n једнак

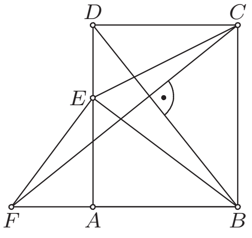
$$\sigma(n) = (1+7)(1+p_1+\cdots+p_1^{r_1})\cdot\ldots\cdot(1+p_k+\cdots+p_k^{r_k}),$$

одакле следи да је $\sigma(n) = 2n$ дељиво са 8, тј. $4 \mid n$. Међутим, тада су $\frac{7q}{2}$, $\frac{7q}{4}$, q, $\frac{q}{2}$, $\frac{q}{4}$, 1 различити делиоци броја n који су мањи од n, а чији је збир једнак $7q + 1 = n + 1$. Контрадикција.

Трећи разред, А категорија

1. Да бисмо доказали да је $\triangle BEF$ правоугли довољно је доказати да је $\triangle FAE \sim \triangle EAB$. Како је $\sphericalangle FAE = \sphericalangle EAB = 90^\circ$, то је довољно доказати да је $\frac{FA}{EA} = \frac{EA}{AB}$. Нека је $AB = a$ и $BC = b$. Како је

$$\triangle CFB \sim \triangle BDA$$



ОК 2011 3А 1

(одговарајући углови су једнаки као углови са нормалним крацима), то је

$$\frac{FB}{BC} = \frac{DA}{AB},$$

па је $FB = \dfrac{b^2}{a}$, односно $FA = \dfrac{b^2 - a^2}{a}$. Даље, из Питагорине теореме је

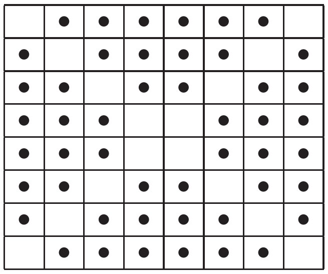
$$AE^2 = BE^2 - AB^2 = b^2 - a^2.$$

Самим тим је $\dfrac{FA}{EA} = \dfrac{EA}{AB}$, што је и требало доказати.
(Тангента 60, стр. 6, М875)

2. Приметимо да на шаховској табли димензија 2012×2012 има $4024 = 2 \cdot 2012$ дијагонала које имају непаран број поља (по 2012 дијагонала паралелних главним дијагоналама - свака друга је непарна) и да оне немају међусобних пресека.

На свакој од тих дијагонала мора постојати бар по једно поље на коме није постављен жетон да бисмо добили да све дијагонале имају паран број жетона. Тиме смо показали да број жетона не може бити већи од

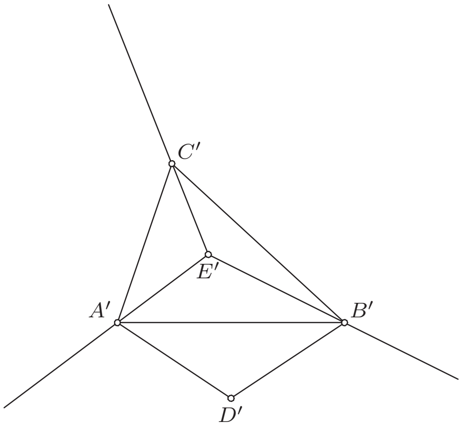
$$2012^2 - 2 \cdot 2012.$$



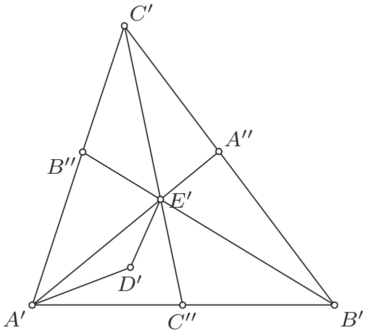
ОК 2011 3А 2

$2012^2 - 2 \cdot 2012$ жетона можемо поставити на таблу да испуњавају услове задатка тако што ћемо поставити жетон на свако поље сем на поља која су на главним дијагоналама (на слици је то приказано за таблу димензија 8×8).

3. Претпоставимо да овакво пресликавање постоји. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао и нека је $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$ и $f(E) = E'$. Приметимо да је сваки четвороугао чија су темена нека четири од темена петоугла $ABCDE$ конвексан. Самим тим, четвороугао $A'B'C'E'$ је конкаван, па без умањења општости можемо претпоставити да је E' у унутрашњости троугла $A'B'C'$. Посматрајмо три конвексна дела на које полуправе $E'A'$, $E'B'$ и $E'C'$ (са почетком у E') деле раван P. Претпоставимо да се тачка D' налази у спољашњости троугла $A'B'C'$ и нека се без умањења општости налази у области у којој се не налази C'. Тада је четвороугао $A'E'B'D'$ конвексан, контрадикција. Дакле, тачка D' се налази у унутрашњости троугла $A'B'C'$. Нека је $A'E' \cap B'C' = \{A''\}$, $B'E' \cap C'A' = \{B''\}$ и $C'E' \cap A'B' = \{C''\}$. Тачка D' се налази у једном од троуглова $A'E'C''$, $B'E'C''$, $B'E'A''$, $C'E'A''$, $C'E'B''$ и $A'E'B''$. Нека се без умањења општости налази у троуглу $A'E'C''$. Тада је четвороугао $A'D'E'C'$ конвексан, контрадикција.



ОК 2011 3А 3а



ОК 2011 3А 3б

4. а) Применом биномног обрасца добијамо

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{2010}\binom{2010}{k}\cdot 2011^{2010-k}\cdot i^k + \sum_{k=0}^{2010}\binom{2010}{k}\cdot 2011^{2010-k}\cdot(-1)^k\cdot i^k \\ &= 2\sum_{k=0}^{1005}\binom{2010}{2k}\cdot 2011^{2010-2k}\cdot i^{2k} = 2\sum_{k=0}^{1005}\binom{2010}{2k}\cdot 2011^{2010-2k}\cdot(-1)^k, \end{aligned}$$

одакле следи да је A цео број.
б) Користећи резултат из дела под (а) добијамо

$$\begin{aligned} A &= 2\sum_{k=0}^{1005}\binom{2010}{2k}\cdot 2011^{2010-2k}\cdot(-1)^k \\ &\equiv 2\sum_{k=0}^{1005}\binom{2010}{2k}\cdot 2011^{2010-2k}\cdot 100^k = S \pmod{101}. \end{aligned}$$

Даље имамо

$$\begin{aligned} S &= 2\sum_{k=0}^{1005}\binom{2010}{2k}\cdot 2011^{2010-2k}\cdot 100^k = 2\sum_{k=0}^{1005}\binom{2010}{2k}\cdot 2011^{2010-2k}\cdot 10^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{2010}\binom{2010}{k}\cdot 2011^{2010-k}\cdot 10^k + \sum_{k=0}^{2010}\binom{2010}{k}\cdot 2011^{2010-k}\cdot(-1)^k\cdot 10^k \\ &= (2011+10)^{2010} + (2011-10)^{2010}, \end{aligned}$$

па је $A \equiv (2011+10)^{2010}+(2011-10)^{2010} \pmod{101}$. Први сабирак 2021^{2010} даје остатак 1 при дељењу са 101, јер је $2021 \equiv 1 \pmod{101}$. Пронађимо који остатак при дељењу са 101 даје други сабирак, односно 2001^{2010}. Како је 101 прост број, који не дели 2001, на основу Мале Фермаове теореме је $2001^{100} \equiv 1 \pmod{101}$, а одатле и $2001^{2000} \equiv 1 \pmod{101}$. Још је остало да нађемо остатак при дељењу броја 2001^{10} са 101. Једноставним рачуном остатака налазимо да је $2001^{10} \equiv 87 \pmod{101}$, па је

$$A \equiv 1 + 87 = 88 \pmod{101}.$$

5. Сабирањем неједнакости $2a_{k-2}-5a_{k-1}+2_k \leqslant 0$, за $2 \leqslant k \leqslant n$, добијамо $3a_n - 2a_{n-1} - 3a_1 + 2a_0 \leqslant 0$, тј. за $n \in \mathbb{N}$

$$3a_n \leqslant 2a_{n-1} + 3. \tag{$*$}$$

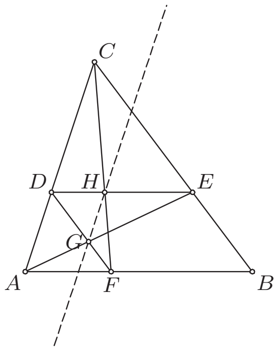
Тврђење сада доказујемо индукцијом. За $n = 0$ тврђење очигледно важи, па је довољно доказати да ако важи за $n-1$ да важи и за n. Из $(*)$ је

$$a_n \leqslant \frac{2}{3} \cdot a_{n-1} + 1 \leqslant \frac{2}{3} \cdot 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] + 1 = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right],$$

што је и требало доказати.

Четврти разред, А категорија

1. Праве DH и AF су паралелне, па је из Талесове теореме $\dfrac{CH}{HF} = \dfrac{CD}{DA}$. Такође, како је $DF \parallel CB$ следи $\dfrac{CD}{DA} = \dfrac{BF}{FA}$, па како је $BF = DE$ (четвороугао $FBED$ је паралелограм), важи $\dfrac{CD}{DA} = \dfrac{DE}{FA}$. Како је $\triangle AFG \sim \triangle EGD$, то је $\dfrac{DE}{FA} = \dfrac{DG}{GF}$.



ОК 2011 4А 1

Из претходних једнакости добијамо $\dfrac{CH}{HF} = \dfrac{DG}{GF}$, одакле је из Талесове теореме $GH \parallel AC$.
(Тангента 6, стр. 6, M874)

2. Обележимо поља табле паровима из Декартовог производа

$$\{A, B, C, D\} \times \{1, 2, 3\}.$$

б) Једну домину можемо поставити на 17 различитих начина (8 вертикалних и 9 хоризонталних). Укупан број позиција је једнак броју неуређених парова домина од кога треба одузети случајеве где се неке домине преклапају. Две вертикалне домине се преклапају у 4 случаја, две хоризонталне у 6 случајева, а хоризонтална и вертикална у 24 случаја, па је тражени број једнак $\binom{17}{2} - (4+6+24) = 136 - 34 = 102$.
а) Како је овде битно која је домина постављена 1. а која 2. то свакој позицији након поствањене 2 домине одговарају 2 начина за њихово постављање (прво једна па друга домина и обратно). Стога има укупно $2 \cdot 102 = 204$ начина да се поставе 2 домине.
в) Победничку стратегију има први играч. Прву домину ставља у центар, тј. стави домину на поља $B2$ и $C2$, а затим домине поставља централно симетрично доминама које је поставио други играч.

3. Нека је

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\, x - x_i \,|.$$

За $x = 0$ имамо $f(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, док за $x = 1$ следи $f(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i) = 1 - f(0)$. Из релације $f(0) + f(1) = 1$ добијамо да важи или $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ или $f(0) < \frac{1}{2} < f(1)$ или $f(1) < \frac{1}{2} < f(0)$. Дакле, како је f непрекидна функција на $[0,1]$, мора постојати $x \in [0,1]$ такво да је $f(x) = \frac{1}{2}$.

4. Доказ изводимо индукцијом по n. Тврђење тривијално важи за $n = 1$, па је довољно доказати индуктивни корак. Нека је зато тврђење тачно за $n - 1$ и докажимо да важи за n. Нека је $b_1 = a_i$ и $b_2 = a_j$. Размотримо следећа два случаја:
Први случај. Нека је i непаран и $j = i + 1$, или i паран и $j = i - 1$. Тада је $b_1b_2 + t = a_ia_{i+1} + t$ или $b_1b_2 + t = a_{i-1}a_i + t$, па тврђење важи на основу индуктивне претпоставке.
Други случај. Нека i и j нису као у првом случају. Тада се за

$$i' = \begin{cases} i - 1, & 2 \mid i \\ i + 1, & 2 \nmid i \end{cases} \qquad j' = \begin{cases} j - 1, & 2 \mid j \\ j + 1, & 2 \nmid j \end{cases}$$

чланови $b_1a_{i'} + t$ и $b_2a_{j'} + t$ не налазе са десне стране неједнакости. Приметимо да је

$$(b_1b_2 + t)(a_{i'}a_{j'} + t) - (b_1a_{i'} + t)(b_2a_{j'} + t) = t(b_1 - a_{j'})(b_2 - a_{i'}) \geqslant 0,$$

тако да се заменом члана $(b_1a_{i'} + t)(b_2a_{j'} + t)$ (који се налази са леве стране неједнакости) са $(b_1b_2 + t)(a_{i'}a_{j'} + t)$ лева страна неједнакости не смањује. Како је овако добијен израз по индуктивној претпоставци не већи од десне стране дате неједнакости, доказ је завршен.

5. Нека је $q > 2$. На основу Мале Фермаове теореме имамо $q^{2q} + (2q)^q \equiv 1 + (-1)^q \equiv 0 \pmod{p}$, те број n са наведеном особином постоји. Доказаћемо да је број n дељив са q. Уведимо ознаке $x = q^n$ и $y = n^q$. Из наведене дељивости број n не може бити дељив са p, те је на основу Мале Фермаове теореме $y^2 \equiv n^{2q} \equiv n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Одавде, како је p прост број, имамо $y \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Зато је $x \equiv \mp 1 \pmod{p}$, те је $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Како за поредак броја q по модулу p важи $r_p(q) \mid p - 1 = 2q$, то је $r_p(q) \in \{1, 2, q, 2q\}$. Како је $1 < q < p$, то је $r_p(q) \neq 1$. Претпоставимо да важи једнакост $r_p(q) = 2$. Тада $q^2 \equiv 1 \pmod{p}$, па је $(q^2-1, 2q+1) = p$. Како $(q^2-1, 2q+1) \mid 3$, то је $p = 3$, односно $q = 1$. Контрадикција. Овим смо доказали да је $r_p(q) \in \{q, 2q\}$, па $q \mid r_p(q)$. Сада имамо $1 \equiv x^2 \equiv q^{2n} \pmod{p}$, одакле $r_p(q) \mid 2n$. Имајући на уму да $q \mid r_p(q)$, као и да је q непаран број, одавде коначно добијамо $q \mid n$. Како $p \nmid q^q + q^q$, то је за $q > 2$, најмања тражена вредност броја n једнака $2q$.
За $q = 2$, односно $p = 5$, непосредном провером се утврђује да је $n = 6$.

Први разред, Б категорија

1. Скицарајмо график функције $f(x) = |x-1|-|x-2|+|x-3|$. Размотримо следећа четири случаја:

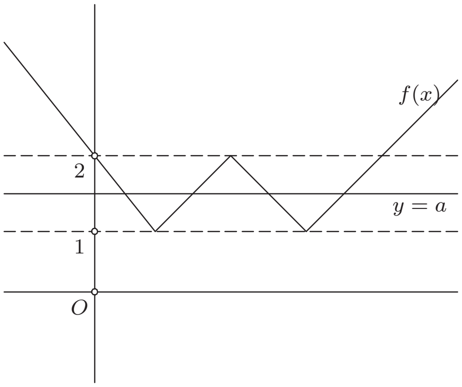
1° $x \leqslant 1$. Тада је $f(x) = -x + 2$.

2° $1 < x \leqslant 2$. Тада је $f(x) = x$.

3° $2 < x \leqslant 3$. Тада је $f(x) = -x + 4$.

4° $x > 3$. Тада је $f(x) = x - 2$.

Потребно је одредити све вредности за a тако да права $y = a$ има тачно четири пресечне тачке са овом функцијом. Са графика функције $f(x)$ примећујемо да ово важи ако и само ако је $a \in (1, 2)$. (Тангента 61, стр. 31, Писмени задаци)



ОК 2011 1Б 1

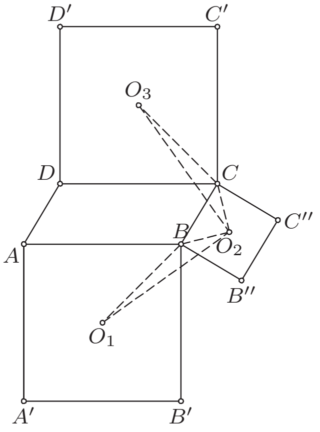
2. Нека је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 2 : 1$, то је $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{a}$, а како је $\overrightarrow{BN} : \overrightarrow{NC} = 1 : 1$, то је $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{b}$. Како су A, S и N колинеарне тачке, то за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ важи $\overrightarrow{AS} = \lambda \cdot \overrightarrow{AN} = \lambda \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{b}$. Са друге стране, како су тачке M, S и D колинеарне, постоји реалан број μ тако да је $\overrightarrow{MS} = \mu \cdot \overrightarrow{MD} = \mu \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{2\mu}{3} \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MS}$, из претходног добијамо $\lambda \cdot \overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{b} = \left(\frac{2}{3} - \frac{2\mu}{3}\right) \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{b}$. Како су $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линеарно независни вектори, то је $\lambda = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2\mu}{3}$ и $\dfrac{\lambda}{2} = \mu$. Решавањем овог система добијамо да је $\lambda = \frac{1}{2}$, па је $AS : SN = 1 : 1$.

3. Приметимо да су Аца, Бојан и Вељко укупно претпоставили тачан полажај за 7 цифара, па су нека двојица претпоставила тачан положај исте цифре. Како су једино на 3. месту нека двојица претпоставила положај исте цифре, то 3. цифра мора бити једнака 3. Ово је једина тачно претпостављена цифра за Вељка, па се број 5 не налази на 6. месту, а како се не може налазити ни на 3. месту, то се број 5 налази на 5. месту, а положај је претпоставио Аца. Даље, цифра 6 се не налази на 2. и 5. месту, па се налази на 6. месту, а положај је опет претпоставио Аца. Положај осталих цифара је претпоставио Бојан, тј. 2 је на 1. месту, 4 на 2. месту, а 1 на 4. месту, па је тражени број једнак 243156.

4. Видети први задатак за први разред А категорије.

5. Нека је без умањења општости $\sphericalangle ABC \geqslant 90^\circ$. Како је $AB = CD$, то су квадрати $ABB'A'$ и $CDD'C'$ подударни, па је $O_1B = CO_3$.

Како у квадрату $BB''C''C$ важи $BO_2 = CO_2$, то је довољно доказати да је $\sphericalangle O_1BO_2 = \sphericalangle O_3CO_2$. Имамо $\sphericalangle O_1BO_2 = \sphericalangle O_1BB' + \sphericalangle B'BB'' + \sphericalangle B''BO_2 = 45^\circ + \sphericalangle B'BB'' + 45^\circ = 90^\circ + \sphericalangle B'BB''$, а како је $\sphericalangle B'BB'' = 360^\circ - \sphericalangle B'BA - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBB'' = 180^\circ - \sphericalangle ABC$, то је $\sphericalangle O_1BO_2 = 270^\circ - \sphericalangle ABC$. Са друге стране, $\sphericalangle O_3CO_2 = \sphericalangle O_3CD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCO_2 = 45^\circ + 180^\circ - \sphericalangle ABC + 45^\circ = 270^\circ - \sphericalangle ABC$, па је $\sphericalangle O_1BO_2 = \sphericalangle O_3CO_2$. Сада је по ставу СУС $\triangle O_1BO_2 \cong \triangle O_3CO_2$.
(Тангента 58, стр. 27, Писмени задаци)

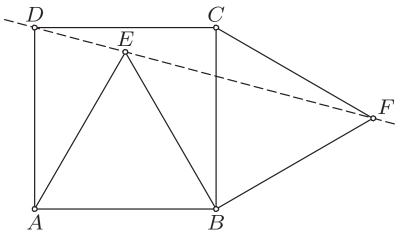


ОК 2011 1Б 5

Други разред, Б категорија

1. Распоредимо прво оних 5 књига које могу стајати једна до друге. То можемо учинити на 5! начина. Преостале књиге се могу налазити између првобитно постављених, на почетку или на крају реда, тј. на укупно 6 места, и то тако да на сваком од ових места стоји тачно једна књига. Дакле, још је потребно одабрати 5 од 6 места и затим на њих распоредити последњих 5 књига. Како је ово могуће учинити на $\binom{6}{5} \cdot 5! = 6!$, то је тражени број распореда једнак $5! \cdot 6!$.
(Тангента 60, стр. 22, Писмени задаци)

3. Да бисмо доказали да су тачке D, E и F колинеарне довољно је доказати да је $\sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF = 180^\circ$. Како је AEB једнакостраничан троугао, то је $\sphericalangle AEB = 60^\circ$ и $EB = AB = EA$. Даље, како је BFC једнакостраничан троугао, то је $BF = BC = AB = EB$.



ОК 2011 2Б 2

Самим тим, троугао EBF је једнакокраки, па је $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BFE$. Како је

$$\begin{aligned} \sphericalangle EBF &= \sphericalangle EBC + \sphericalangle CBF \\ &= 90^\circ - \sphericalangle ABE + \sphericalangle CBF \\ &= 90^\circ, \end{aligned}$$

то је из претходног $\sphericalangle BEF = 45^\circ$. Даље, троугао DAE је једнакокраки ($DA = EA$), па како је

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB - \sphericalangle EAB = 30^\circ$, то је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle AED = 75^\circ$. Сада је

$$\sphericalangle DEA + \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEF = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

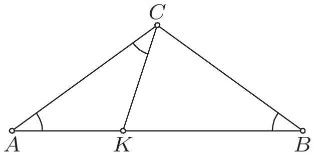
што је и требало доказати.
(Тангента 54, стр. 47, Писмени задаци)

3. Неједнакост $\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1} \leqslant d$ је еквивалентна са

$$\frac{(2-d)x^2+(2-d)x+(3-d)}{x^2+x+1} \leqslant 0.$$

Именилац ове неједначине је увек позитиван, јер је дискриминанта одговарајуће квадратне једначине једнака -3, а водећи коефицијент 1, па ће полазна неједначина бити испуњена за свако x уколико је бројилац претходног разломка увек негативан. То је испуњено када су водећи коефицијент и дискриминанта мањи од нуле, тј. $2-d<0$ и $(2-d)^2 - 4\cdot(2-d)\cdot(3-d) = (2-d)\cdot(3d-10) \leqslant 0$. Из прве неједначине је $d>2$, па из друге добијамо $d \geqslant \frac{10}{3}$. Самим тим, скуп добрих бројева је интервал $\big[\frac{10}{3}, +\infty\big)$.

4. На основици AB одредимо тачку K тако да је $\sphericalangle ACK = 36^\circ$. Нека је $AB = c$, $AC = BC = b$ и $AK = x$. Троуглови ACK и ABC су слични, јер имају све једнаке углове, па је $\dfrac{x}{b} = \dfrac{b}{c}$. Како је $BK = c - x = b$, то се последња једнакост своди на $\dfrac{c-b}{b} = \dfrac{b}{c}$.



ОК 2011 2Б 4

Уколико уведемо смену $t = \dfrac{c}{b}$ добијамо еквивалентну једначину

$$t^2 - t + 1 = 0.$$

Решења ове једначине су $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, па како је $\dfrac{c}{b} > 0$, то је $\dfrac{c}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Из дате једнакости је $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$, па како је a прост број, а $c-b < c+b$ (b и c су природни бројеви), то је $c-b=1$ и $c+b=a^2$. Из ових једнакости је $c = b+1$ и $a^2 = 2b+1$. Како за $b=1$ и $b=2$ број a није прост, то је $b \geqslant 3$. За $b \geqslant 3$ је $b^2 \geqslant 3b > 2b+1$, па је $a^2 < b^2$, тј. $a < b$, што је и требало доказати.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је оштар угао ромба једнак β. Како је лопта уписана у призму, то је висина призме као и висина ромба једнака $2R$, где је R полупречник лопте. Сада, из дефиниције угла α, закључујемо да је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2R}{d}$, где је d дужина дуже дијагонале датог ромба. Уколико је a страница ромба, то је $d = 2a\cos\dfrac{\beta}{2}$ и $a\sin\beta = 2R$. Сада је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\beta}{2a\cos\frac{\beta}{2}} = \sin\frac{\beta}{2},$$

односно $\beta = 2\arcsin(\operatorname{tg}\alpha)$.
(Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци)

2. Прву цифру броја можемо изабрати на 9 начина. Друга цифра може бити различита од прве цифре или једнака првој цифри. У случају да је друга цифра различита од прве можемо је изабрати на 9 начина. Тада за трећу и четврту цифру можемо одабрате једну од цифара које се налазе на првом и другом месту, па је укупан број бројева у овом случају једнак $9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2$. Размотримо сада случај када је друга цифра једнака првој. Сличним разматрањем као у претходном случају закључујемо да постоји $9 \cdot 9 \cdot 2$ бројева код којих је трећа цифра различита од прве две. На крају, уколико су прве три цифре једнаке четврту можемо одабрати на 10 начина, па је број оваквих бројева једнак $9 \cdot 9$. Дакле, тражени број је једнак $9\cdot 9\cdot 2\cdot 2 + 9\cdot 9\cdot 2 + 9\cdot 10 = 576$.
(Тангента 56, стр. 24, Писмени задаци)

3. Дата неједначина дефинисана је за бројеве $x \in [2, \infty)$. Како за свако $x > 2$ важи

$$\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x-2} + x > \sqrt{2^2-3} + 0 + 2 = 3,$$

а $x = 2$ није решење дате неједначине, то су решења елементи скупа $(2, \infty)$.

4. Област дефинисаности за полазну једначину је скуп $[-1,1]$. Како за свако $x \in [-1,1]$ важи $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, то је дата једначина еквивалентна са

$$4^{x\arcsin x} + 4^{x(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)} = 2^{\frac{2+\pi x}{2}}.$$

Уколико ову једначину помножимо са $4^{x\arcsin x}$, добијамо еквивалентну једначину

$$(4^{x\arcsin x})^2 + 4^{\frac{\pi x}{2}} - 2^{\frac{2+\pi x}{2}} \cdot 4^{x\arcsin x} = (4^{x\arcsin x} - 2^{\frac{\pi x}{2}})^2 = 0.$$

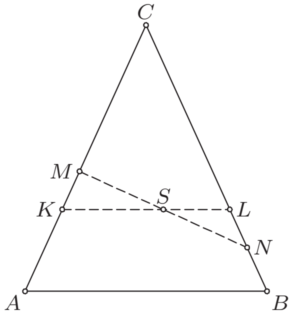
Дакле, решења полазне једначине су решења једначине $4^{x\arcsin x} - 2^{\frac{\pi x}{2}} = 0$. Ова једначина је еквивалентна са $2x\arcsin x = \dfrac{\pi x}{2}$, па је $x = 0$ или $\arcsin x = \dfrac{\pi}{4}$, тј. $x \in \left\{0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

5. Нека је $KL \cap MN = \{S\}$ и $\sphericalangle SKC = \alpha$, $\sphericalangle SMA = \beta$, $\sphericalangle SNL = \gamma$, $\sphericalangle LSN = \omega$. Нека (без умањења општости) важе следећи распореди $A-K-M-C$ и $B-N-L-C$. Из синусних теорема примењених на троуглове KMS и LNS добијамо

$$\begin{aligned} KS &= MS\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = MS\frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin\alpha}, \\ SL &= SN\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = MS\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

Сада је

$KL = KS + SL = MS \cdot \dfrac{2\sin\alpha\cos\omega}{\sin\alpha} = 2 \cdot MS \cdot \cos\omega$ и самим тим $KL = MN \cdot \cos\omega$, што је требало доказати.



ОК 2011 3Б 5

Четврти разред, Б категорија

1. Из $a = \log_{10} 2$ следи $\dfrac{1}{a} = \log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$. Одатле је $\log_2 5 = \dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{1-a}{a}$, што повлачи $\log_5 2 = \dfrac{a}{1-a}$. Из $a = \log_{10} 2$ и $b = \log_{10} 3$ добијамо да је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \log_3 2$. Из $b = \log_{10} 3$ следи $\dfrac{1}{b} = \log_3 10 = \log_3 2 + \log_3 5 = \dfrac{a}{b} + \log_3 5$. Одатле је $\log_3 5 = \dfrac{1}{b} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{1-a}{b}$, што повлачи $\log_5 3 = \dfrac{b}{1-a}$. Коначно имамо да је $\log_5 216 = \log_5(2^3 \cdot 3^3) = 3(\log_5 2 + \log_5 3) = 3 \cdot \dfrac{a+b}{1-a}$.

2. Координате тачке A су решења система $y = kx$, $y = x^2$. Како је $k > 0$, то је из претходног $A(k, k^2)$. Слично, координате тачке B су решења система $y = -\left(k + \dfrac{1}{k}\right) \cdot x$, $y = x^2$. Како је $-k - \dfrac{1}{k} < 0$, то је из претходног $B\left(-k - \frac{1}{k}, k^2 + \frac{1}{k^2} + 2\right)$. Сада је

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BA} = (k, k^2) \cdot \left(2k + \frac{1}{k}, -\frac{1}{k^2} - 2\right) = 0,$$

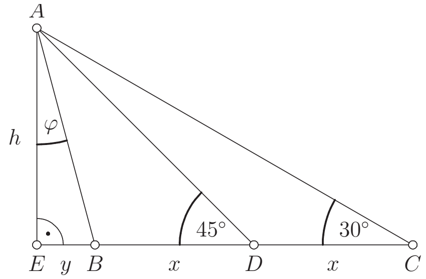
што значи да је $\sphericalangle OAB = 90^\circ$, па $\triangle OAB$ никад није оштроугли.

3. Функција f је непрекидна на сваком од интервала $[0, 64)$ и $(64, +\infty)$, па је довољно одредити a такво да је функција непрекидна у тачки 64, тј. да је $\lim\limits_{x\to 64} f(x) = f(64) = a$. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} &= \lim_{x\to 64} \frac{(\sqrt[6]{x})^3 - 8}{(\sqrt[6]{x})^2 - 4} = \lim_{x\to 64} \frac{(\sqrt[6]{x} - 2)(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 4)}{(\sqrt[6]{x} - 2)(\sqrt[6]{x} + 2)} \\ &= \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 4}{\sqrt[6]{x} + 2} = 3,\end{aligned}$$

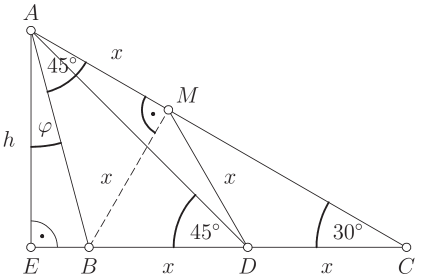
то је $a = 3$.
(Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци)

4. Означимо са $\sphericalangle BAE = \varphi$, $AE = h$, $BE = y$, $BD = DC = x$.



Из једнакокрако–правоуглог $\triangle AED$ имамо да је $x + y = h$. Из половине једнакостраничног $\triangle AEC$ имамо да је $2x + y = h\sqrt{3}$.
Решавањем овог система (по x и y) добијамо да је $x = h(\sqrt{3} - 1)$ и $y = h(2 - \sqrt{3})$.
Одавде добијамо да је $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{h} = 2 - \sqrt{3}$. Како је $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 7 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, добијамо да је $2\varphi = 30^\circ$ одакле следи $\varphi = 15^\circ$.

Друго решење. Нека је M подножје нормале из B на AC.



Троугао BCM је половина једнакостраничног, а троугао BDM је једнакостранични, па важи

$$BM = BD = DC = DM = x.$$

Даље, угао ADM износи 15° ($\sphericalangle ADM = \sphericalangle BDM - \sphericalangle BDA = 60^\circ - 45^\circ$), па је троугао ADM једнакокрак, одакле је (уз горње једнакости) $AM = DM = x$, тј. $AM = BM$. Дакле, троугао AMB јесте једнакокрако-правоугли, па угао BAM износи 45°. Како је $\triangle CEA$ правоугли, добијамо да је $\sphericalangle CAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, а одатле је $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE - \sphericalangle BAM = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

5. Парови највеће и најмање цифре могу бити $(9, 2)$, $(8, 1)$, $(7, 0)$. За остале 4 цифре тих шестоцифрених бројева у сваком од ова три случаја имамо по 6 могућности, па их можемо изабрати на $\binom{6}{4}$ начина. Одабраних 6 различитих цифара можемо распоредити на 6! начина. Од укупног броја оваквих распореда треба одузети број оних распореда који почињу цифром 0, јер они не представљају шестоцифрене бројеве. Ти распореди се јављају када је највећа цифра 7, а најмања 0, и има их $\binom{6}{4} \cdot 5!$. Дакле, укупан број шестоцифрених бројева са траженим својством је

$$3 \cdot \binom{6}{4} \cdot 6! - \binom{6}{4} \cdot 5! = 30600.$$

(Тангента 60, стр. 5, M864)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19.03.2011.

Први разред, А категорија

1. Установимо да ли n-ти ред пирамиде остаје празан. Он је непразан акко постоји број $x \in \mathbb{N}$, $x > n$, такав да је

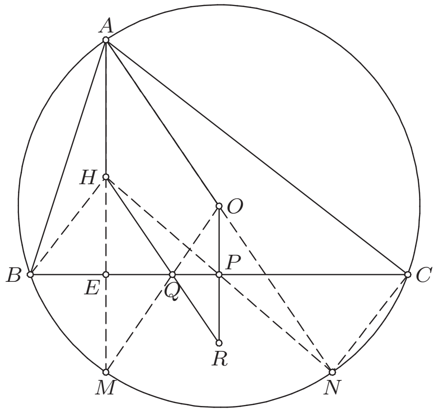
$$(x-n)^2+(x-(n-1))^2+\ldots+(x-1)^2+x^2 = (x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n)^2. \quad (*)$$

Једначина $(*)$ еквивалентна је са $(n+1)x^2 - 2x(n+(n-1)+\ldots+1) + 1^2+2^2+\ldots+n^2 = nx^2 + 2x(n+(n-1)+\ldots+1) + 1^2+2^2+\ldots+n^2$, односно $x^2 - 2xn(n+1) = 0$. Решења последње једначине су $x = 0$, као и $x = 2n(n+1)$. Како је нужно да важи $x > n$, закључујемо да n-ти ред пирамиде чине бројеви

$$n(2n+1),\ \ldots,\ 2n(n+1),\ 2n(n+1)+1,\ \ldots,\ n(2n+3).$$

Да би одредили да ли се број 2011 јавља у неком реду пирамиде, треба утврдити да ли постоји природан број n такав да важи $n(2n+1) \leqslant 2011 \leqslant n(2n+3)$. Како за $n = 31$ важи $1953 = 31 \cdot 63 \leqslant 2011 \leqslant 31 \cdot 65 = 2015$, то закључујемо да ће се број 2011 наћи у 31. реду пирамиде.

2. Нека је E подножје висине из тачке A на BC. Тада је E средиште дужи HM, па је троугао QHM једнакокрак и $\sphericalangle QMH = \sphericalangle QHM$. Такође је $AO = OM$, па је троугао AOM једнакокрак и $\sphericalangle OMA = \sphericalangle OAM$. Како су тачке O, Q и M колинеарне, добијамо $\sphericalangle QHM = \sphericalangle OAM$, тј. $AO \parallel HQ$. Како је $BH \perp AC$ и $\sphericalangle ACN = 90^\circ$ (AN је пречник описане кружнице), то је $BH \parallel NC$. Аналогно добијамо да је $CH \parallel BN$, па је четвороугао $HBNC$ паралелограм. Самим тим, тачка P је средиште странице BC, одакле је $OP \perp BC$. Како је и $AH \perp BC$, имамо $AH \parallel OP$, чиме је доказ завршен.



ДР 2011 1А 2

3. Доказаћемо да бројеви облика 10^k+1, где је $k \geqslant 2$ природан број, задовољавају услов задатка. Заиста, за $n = 10^k+1$, $k \in \mathbb{N}$, имамо да је:

$$(10^k+1)^2 = 10^{2k} + 2\cdot 10^k + 1 = 1\underbrace{0..0}_{k-1}2\underbrace{0..0}_{k-1}1,$$

$$(10^k+1)^3 = 10^{3k} + 3\cdot 10^{2k} + 3\cdot 10^k + 1 = 1\underbrace{0..0}_{k-1}3\underbrace{0..0}_{k-1}3\underbrace{0..0}_{k-1}1,$$

$$(10^k+1)^4 = 10^{4k} + 4\cdot 10^{3k} + 6\cdot 10^{2k} + 4\cdot 10^k + 1 = 1\underbrace{0..0}_{k-1}4\underbrace{0..0}_{k-1}6\underbrace{0..0}_{k-1}4\underbrace{0..0}_{k-1}1,$$

те су бројеви n^2, n^3 и n^4 симетрични. Са друге стране, за $k \geqslant 2$, важи:

$$\begin{aligned}(10^k+1)^5 &= 10^{5k}+5\cdot10^{4k}+10\cdot10^{3k}+10\cdot10^{2k}+5\cdot10^k+1\\ &= 1\,\underbrace{0..0}_{k-1}\,5\,\underbrace{0..0}_{k-2}\,10\,\underbrace{0..0}_{k-2}\,10\,\underbrace{0..0}_{k-1}\,5\,\underbrace{0..0}_{k-1}\,1,\end{aligned}$$

те број n^5 није симетричан (цифра на $2k$-том месту са леве стране је 1, а са десне је 0).

4. Докажимо да је правоугаоник димензија $m \times n$ могуће прекрити датим фигурама ако и само ако је mn дељиво са 3.
Уколико $3 \mid m$ (односно $3 \mid n$) правоугаоник се може поплочати фигурама 3×1 (односно 1×3), чиме је овај смер доказа завршен.
Докажимо да уколико је правоугаоник димензија $m \times n$ могуће поплочати датим фигурама да $3 \mid mn$. Упишимо у поље i-те врсте одоздо и j-те колоне слева број $2^{i+j-2} \pmod 7$, за $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (као на слици). Како је збир бројева покривених сваком фигуром дељив са 7, то и збир свих бројева у таблици мора бити дељив са 7. Збир свих бројева у таблици је једнак

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}2^{i+j-2}=\sum_{i=1}^{m}2^{i-1}\sum_{j=1}^{n}2^{j-1}=\sum_{i=1}^{m}2^{i-1}(2^n-1)=(2^m-1)(2^n-1).$$

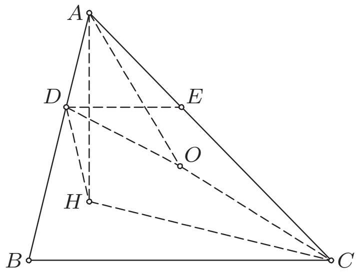
Овај број је дељив са 7 само ако је m или n дељиво са 3, односно ако $3 \mid mn$.

4	1	2	4	1	2
2	4	1	2	4	1
1	2	4	1	2	4
4	1	2	4	1	2
2	4	1	2	4	1
1	2	4	1	2	4

ДР 2011 1А 4

Други разред, А категорија

1. Како је D на симетрали дужи AH, то је $\sphericalangle DHA = \sphericalangle DAH = \sphericalangle BAH = 90^\circ - \beta$, где је $\beta = \sphericalangle ABC$. Како је троугао AOC једнакокрак, следи $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = 90^\circ - \beta$. Сада је $\triangle ADH \sim \triangle AOC$, па је $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AO}{AC}$. Даље, како је $\sphericalangle DAO = \sphericalangle HAC$ и из претходног $\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AH}{AC}$, то је $\triangle ADO \sim \triangle AHC$.



ДР 2011 2А 1

Дакле, $\sphericalangle AOD = \sphericalangle ACH = 90^\circ - \alpha$, где је $\alpha = \sphericalangle BAC$, па из $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 90^\circ - \gamma$, где је $\gamma = \sphericalangle ACB$, добијамо $\sphericalangle ODB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle OAB = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = \beta$. Како је $DE \parallel BC$, имамо $\sphericalangle ADE = \beta$. Сада је $\sphericalangle ODB = \sphericalangle ADE$, односно AD је симетрала спољашњег угла ODE. Слично је AE симетрала спољашњег угла OED, па је A центар споља приписане кружнице $\triangle ODE$.

2. Претпоставимо да број $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ задовољава наведену једнакост. Размотримо најпре случај када нису све цифре броја n једнаке 9. Тада постоји најмањи индекс i, $0 \leqslant i \leqslant k$, такав да је $a_i \neq 9$. Уколико је $i \leqslant 3$, уочимо број $x = n + 10^i$. Овај број је већи од n, а мањи од $n + 1001$, те се налази у низу бројева $n + 1, \ldots, n + 2010$. Како се декадни запис бројева x и n разликује само на позицији $i + 1$, то је $S(x) = S(n) + 1$, па су бројеви $S(x)$ и $S(n)$ узајамно прости. Како је лева страна полазне једнакости дељива са $S(x)$, то је дељива и десна. Међутим, како је $(S(x), S(n)) = 1$, то је и $(S(x), S(n)^{2011}) = 1$, а важи $S(x) \mid S(n)^{2011}$. Одавде закључујемо да је $S(x) = 1$, што није могуће јер је $S(x) = S(n) + 1 > 1$. Нека је сада $i > 3$ и нека је $t = a_k + \ldots + a_i$. Тада је $S(n) = t + 9i$, док су бројеви $S(n+1)$, $S(n+2)$, $\ldots$, $S(n+2011)$, редом једнаки бројевима $t+1$, $t+1+S(1)$, $t+1+S(2)$, $\ldots$, $t+1+S(2010)$. Зато је производ свих бројева на левој страни полазне једнакости мањи од $(t + 1 + S(1999))^{2011} = (t + 29)^{2011}$, док је десна не мања од $(t + 36)^{2011}$. Одавде, пошто је $(t + 36)^{2011} > (t + 29)^{2011}$, посматрана једнакост не важи.

Остаје да размотримо случај $n = 10^k - 1$. Ако је $k \leqslant 3$, тада задатак решавамо аналогно као у случају $i \leqslant 3$, посматрањем броја $x = n + 1000$. Уколико је пак $k > 3$, задатак решавамо аналогно са случајем $i > 3$, стављајући $t = 0$.

Овим је доказано да не постоји природан број n за који важи наведена једнакост.

3. Из прве једначине је $z = -x - y - v$, па заменом у другу добијамо

$$v^2 + (x + 2y - ty)v + (y^2 + tx^2 + txy) = 0. \qquad (*)$$

При томе последња једначина има јединствено решење ако и само ако полазни систем има јединствено решење. Јасно је $(x, y, v) = (0, 0, 0)$ једно решење ове једначине, па за све $(x, y) \neq (0, 0)$ дискриминанта једначине $(*)$ (посматране по v) мора бити мања од нуле, тј.

$$D = (x+2y-ty)^2 - 4(y^2+tx^2+txy) = (1-4t)x^2 + 2(2-3t)xy + t(t-4)y^2 < 0.$$

Нека је $y \neq 0$. Уколико поделимо последњу неједначину са y^2 и уведемо смену $\dfrac{x}{y} = w$ добијамо еквивалентну неједначину

$$(1 - 4t)w^2 + 2(2 - 3t)w + t(t - 4) < 0.$$

Последње важи за све w, па су дискриминанта одговарајуће квадратне функције и водећи коефицијент мањи од нуле, односно

$$1 - 4t < 0, \qquad 4(2-3t)^2 - 4(1-4t)t(t-4) = 16(t+1)(t^2-3t+1) < 0.$$

Дакле $t > \dfrac{1}{4}$, па из друге неједначине добијамо $t^2 - 3t + 1 < 0$. Решавањем одговарајуће квадратне једначине добијамо

$$t \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = I.$$

Приметимо да је за $y = 0$ и $t \in I$ испуњено $D < 0$ (јер је $x \neq 0$), па је скуп решења задатка управо интервал I.

4. Докажимо да Али Баба има стратегију којом може сигурно да пронађе благо.

Претпоставимо, за почетак, да Али Баба једног јутра има „додатну информацију" да се благо тог дана налази у пећини са парним бројем. У таквој ситуацији Али Баба најпре улази у пећину са бројем 2010. Уколико благо није у њој, то значи да је у некој пећини са парним бројем не већим од 2008. Зато ће благо наредног дана бити у пећини са непарним бројем не већим од 2009. Али Баба потом улази у пећину са бројем 2009. Уколико благо није у тој пећини, онда се налази у некој пећини са непарним бројем не већим од 2007 и наредног дана ће бити у пећини са парним бројем не већим од 2008. Зато, Али Баба наредног дана улази у пећину са бројем 2008, итд. Настављајући описану стратегију, уколико још увек није пронашао благо, Али Баба долази у ситуацију да једног дана зна да је благо у парној пећини са бројем не већим од 2. Дакле, наредног дана Али Баба улази у пећину са бројем 2 и проналази благо. Овим је доказано да под претпоставком да Али Баба има „додатну информацију" може пронаћи благо. Остаје да опишемо стратегију која обезбеђује наведену „додатну информацију".

Претпостављамо да приликом сваког од наредних покушаја Али Баба није пронашао благо (у супротном доказ је завршен). Али Баба првог дана улази у пећину са бројем 2. Трећег дана се благо може наћи у пећини са бројем 2 само ако је првог дана било у пећини број 4. Међутим, то би значило да је другог дана у пећини број 3. Зато другог дана Али Баба улази у пећину са бројем 3, а трећег у пећину са бројем 4. Ови покушају гарантују да трећег дана благо није скривено у пећинама са бројевима 2 и 4. Посматрајмо пети дан. Благо тог дана не може бити у пећини број 2, а у пећини број 4 може бити само ако је трећег дана било у пећини број 6. Међутим, онда би се благо четвртог дана налазило у пећини број 5. Али Баба, зато, четвртог и петог дана, редом, улази у пећине са бројевима 5 и 6. Овако благо петог дана сигурно није у пећинама са бројевима 2, 4 и 6. Настављајући наведени поступак (улазећи k-тог дана у пећину са бројем

$k+1,\ 1 \leqslant k \leqslant 2009$), Али Баба након 2009 дана добија информацију да благо тог 2009. дана није у пећинама $2, 4, 6, \ldots, 2008, 2010$. Дакле, након 2009 дана благо је у некој од непарних пећина, те се 2010. дана налази у некој пећини са парним бројем. Овим Али Баба долази до „додатне информације” и надаље спроводи поступак описан у првом делу решења.

Трећи разред, А категорија

1. а) Нека је $P(x) = 1+x+\ldots+x^{2011}$. Како су бројеви $a_1, \ldots, a_{2011}$ нуле полинома $P(x)$, то су нуле и полинома $x^{2012}-1$, па је модуо сваког од њих једнак 1. Након степеновања са m, њихов модуо ће и даље бити једнак 1, односно, оне ће остати на јединичном кругу. Претпоставимо да сви бројеви $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{2011}^m$ припадају некој правој p. Како права p може да пресеца јединични круг у највише две различите тачке, A и B, следи да сваки од бројева $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{2011}^m$ мора да буде једнак A или B. Без губитка оптштости, можемо претпоставити да је барем 1006 од бројева $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{2011}^m$ једнако A, рецимо $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{1006}^m$. Тада су бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{1006}$ нуле полинома $x^m - A$, па је зато $m \geqslant 1006$. Да је $m = 1006$ уверавамо се из чињенице да су бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ нуле полинома $x^{2012}-1 = (x^{1006}-1)(x^{1006}+1)$. Зато је сваки од бројева $a_1^{1006}, a_2^{1006}, \ldots, a_{2011}^{1006}$ једнак или 1 или -1, односно сви они припадају једној правој.

б) Нека је $P(x) = 1+x+\ldots+x^{2010}$. Свака нула полинома $P(x)$ нула је и полинома $Q(x) = x^{2011}-1$. Ако је $m = 2011$ сви бројеви $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{2010}^m$ биће једнаки 1, па ће и припадати истој правој (било којој која пролази кроз 1). Претпоставимо да је $m < 2011$. Све нуле полинома $P(x)$ су: $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{2010}$, где је $\omega = \cos\frac{2\pi}{2011} + i\sin\frac{2\pi}{2011}$. Број 2011 је прост, па су све нуле полинома $P(x)$ примитивни корени јединице реда 2011, тј. ако је ξ произвољна нула полинома $P(x)$, тада је $\xi^k = 1$ ако и само ако $2011 \mid k$. Као и у делу под а) закључујемо да морају постојати два, не обавезно различита броја, A и B, таква да је сваки од бројева $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{2010}^m$ једнак једном од њих. За сваку нулу ξ полинома $P(x)$, број $\overline{\xi} = \frac{1}{\xi}$ такође је нула тог полинома. Међусобно конјуговани бројеви се у комплексној равни налазе симетрично у односу на x-осу, но како су m-ти степени конјугованих бројева такође међусобно конјуговани и они ће бити симетрични у односу на x-осу. Даље, ако је ξ нула полинома P, за свако $m < 2011$ је $\xi^m \neq \overline{\xi}^m$. Дакле, након степеновања са m, бројеви ξ^m и $\overline{\xi}^m$ остају различити и симетрични у односу на x-осу. Због тога и бројеви A и B морају бити различити и симетрични у односу на x-осу, односно међусобом конјуговани. Бројеви A и B, будући да су m-ти степени нула полинома $Q(x)$ и сами су нуле тог полинома. Нека је $A = \omega^i$, за неко i из скупа $\{1, 2, \ldots, 2010\}$. Тада је $\omega^{mi} \in \{A, B\}$, односно $\omega^{mi} = \omega^i$ или $\omega^{mi} = \frac{1}{\omega^i}$. Први случај даје $\omega^{i(m-1)} = 1$, а други $\omega^{i(m+1)} = 1$, односно, следи $2011 \mid i(m-1)$ или $2011 \mid i(m+1)$. Пошто су бројеви i и m мањи од 2011, ово је могуће само када је $m = 1$ или $m = 2010$. Но у оба случаја важи $\{a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{2010}^m\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, па нуле нису на истој правој. Значи, $m = 2011$ је најмањи тражени број.

2. За врсту или колону матрице ћемо рећи да је златна уколико не садржи 3 различита броја из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Прво ћемо доказати да су у случају златне матрице или све врсте златне или све колоне златне.

Претпоставимо супротно, да i-та врста и j-та колона нису златне. Приметимо да ниједна од суседних врста врсти i не може да буде златна. Сада једноставном индукцијом добијамо да ниједна врста није златна, и аналогно за колоне.

Не умањујући општост, претпоставимо да је $a_{11} = 1$ и $a_{12} = 2$. Претпоставимо да је i најмањи број такав да је $a_{1i} \notin \{1, 2\}$ и да је $a_{1i} = 3$. Претпоставимо да је i непаран (случај када је j паран је сличан). Прва врста изгледа овако: $1212\ldots123\ldots$. Тада мора да важи $a_{2,i-1} = 4$ и сада можемо да реконструишемо другу врсту: $3434\ldots341\ldots$. Посматрајмо прву колону и означимо са j најмањи индекс за који је $a_{j1} \notin \{1, 3\}$. Ако је j непаран тада мора бити $a_{1j} = 2$, а ако је j паран онда је $a_{1j} = 4$. Врста l, за $3 \leqslant l \leqslant j-1$, мора да буде копија врсте $l-2$. Сада су елементи j-те врсте једнозначно одређени и добијамо да је $a_{j,i-1} = 1$. То није могуће због $a_{j-1,i} = 1$. Аналогно се разматра случај када је j паран.

Означимо са A скуп златних матрица којима су врсте златне, а са B скуп златних матрица којима су колоне златне. На основу формуле укључивања и искључивања имамо $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Сада ћемо да одредимо број елемената скупа A. На $\binom{4}{2} = 6$ начина можемо изабрати пар бројева који ће се појављивати у непарним врстама. Тада су бројеви које се појављују у парним врстама једнозначно одређени. Једном кад је овај избор извршен, пар (a_{1j}, a_{2j}) се може изабрати на 2 начина, што значи да се прве две колоне могу изабрати на 2^{2011} начина. Златна матрица је једнозначно одређена избором прве две колоне и условом да су врсте златне. Према томе $|A| = 6 \cdot 2^{2011}$. Слично је и $|B| = 6 \cdot 2^{2011}$.

Матрице из скупа $A \cap B$ су једнозначно одређене горњом подматрицом 2×2. Дакле, $|A \cap B| = 24$ и $|A \cup B| = 2 \cdot 6 \cdot 2^{2011} - 24 = 24(2^{2010} - 1)$.

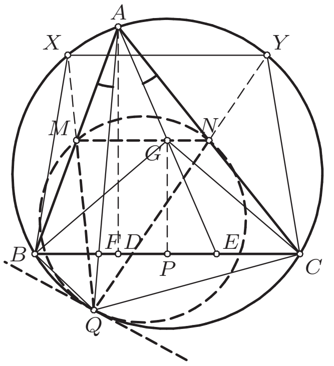
3. Докажимо прво следећу лему:

> *Лема.* Нека је p прост број, $d \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ и $A = \{1^d, 2^d, \ldots, (p-1)^d\}$. Ако је B скуп свих оних бројева из A који дају остатак 1 при дељењу са p, тада је $|B| = (p-1, d)$.
>
> *Доказ.* Обележимо са g примитивни корен по модулу p. Елементи скупа A по модулу p су једнаки бројевима $g^d, g^{2d}, \ldots, g^{(p-1)d}$, у неком редоследу. Приметимо да је $g^{id} \equiv 1 \pmod{p}$ ако и само ако $p-1 \mid id$, односно, ако и само ако $\frac{p-1}{(p-1,d)} \mid i$. У скупу $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ има тачно $(p-1, d)$ бројева дељивих са

$\frac{p-1}{(p-1,d)}$, па и у скупу A има тачно $(p-1,d)$ бројева који дају остатак 1 при дељењу са p.

Вратимо се сада на задатак и докажимо општије тврђење. Нека је p прост број и претпоставимо да су бројеви $1^m, 2^m, \dots, (p-1)^m$ распоређени на кружници у неком редоследу $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ тако да $p \mid a_i + a_{i+1}$ $(a_p = a_1)$. Можемо претпоставити, без губљења општости, да је $a_1 = 1^m$. Тада је $a_2 \equiv -1 \pmod{p}$, $a_3 \equiv 1 \pmod{p}$, $a_4 \equiv -1 \pmod{p}$, итд. $a_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Следи да је за свако $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $a_i^{2m} \equiv 1 \pmod{p}$. Ако је g примитивни корен по модулу p, пошто је g једнак неком a_i, следи да важи $g^{2m} \equiv 1 \pmod{p}$, односно $p-1 \mid 2m$. Зато је $m \geqslant \frac{p-1}{2}$. Докажимо да је за $m = \frac{p-1}{2}$ заиста могуће распоредити бројеве на кружници на описан начин. Наиме, када је $m = \frac{p-1}{2}$, из помоћног тврђења следи да тачно $\big(p-1, \frac{p-1}{2}\big) = \frac{p-1}{2}$ бројева из скупа $\{1^{\frac{p-1}{2}}, 2^{\frac{p-1}{2}}, \dots, (p-1)^{\frac{p-1}{2}}\}$ даје остатак 1 при дељењу са p. Због Мале Фермаове теореме знамо да $p \mid a^{p-1} - 1$, где је $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, а како је $a^{p-1} - 1 = (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)$, следи да број $a^{\frac{p-1}{2}}$ даје као остатак при дељењу са p или 1 или -1. Другим речима, осталих $\frac{p-1}{2}$ бројева из скупа $\{1^{\frac{p-1}{2}}, 2^{\frac{p-1}{2}}, \dots, (p-1)^{\frac{p-1}{2}}\}$ који не дају остатак 1, дају остатак -1 при дељењу са p. Пошто једна половина бројева $\{1^{\frac{p-1}{2}}, 2^{\frac{p-1}{2}}, \dots, (p-1)^{\frac{p-1}{2}}\}$ даје остатак 1, а друга -1 при дељењу са p, распоредимо их на кругу тако да се бројеви који дају остатак 1 и -1 смењују наизменично. На тај начин p дели збир свака два суседна, а тражени најмањи број је $m = \frac{p-1}{2}$.
Како је 2011 прост број, у нашем случају тражени најмањи број је $m = 1005$.

4. Нека је P средина странице BC, а G пресек дужи AE и MN. G је на средини дужи AE, јер је MN средња линија, а P је на средини дужи DE, због начина задавања тачке E, па је GP средња линија троугла ADE. Због тога је $GP \perp BC$, па је троугао BCG једнакокраки, са $BG = CG$. Због услова задатка је $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle EAC$, а због једнакости периферијских углова је и $\sphericalangle BQA = \sphericalangle ECA$.

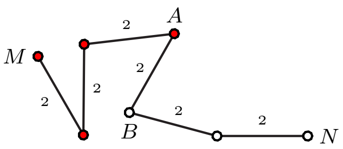


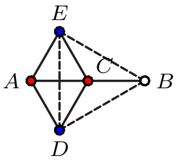
ДР 2011 3А 4

Одатле следи $\triangle BQA \sim \triangle ECA$. QM и CG су одговарајуће тежишне дужи у тим троугловима, па је зато $\sphericalangle BQM = \sphericalangle ECG$. Аналогно је $\sphericalangle NQC = \sphericalangle EBG$, а због једнакости углова $\sphericalangle GBC = \sphericalangle BCG$ следи и $\sphericalangle BQM = \sphericalangle CQN$. Нека су X и Yпресеци правих QM и QN са кругом описаним око $\triangle ABC$, редом. Због $\sphericalangle BQM = \sphericalangle CQN$ следи $BX = CY$, па је $BCYX$ једнакокраки трапез. Зато је $XY||MN$, па је $\sphericalangle QYX = \sphericalangle QNM$, као углови са паралелним крацима. Ако је t тангента на круг описан око $\triangle ABC$ у тачки Q, тада је угао између t и MQ једнак $\sphericalangle QYX$, а тај угао је једнак са углом $\sphericalangle QNM$, па је t такође тангента на круг описан око $\triangle QMN$ у Q. Одавде следи да се ова два круга додирују у тачки Q.

Четврти разред, А категорија

1. Ако су све тачке равни обојене истом бојом тврђење тривијално важи.
У супротном постоје 2 тачке A и B које су на растојању 2 cm које су обојене различитим бојама (ако имамо неке 2 тачке M и N које су обојене различитим бојама и на произвољном су растојању онда их можемо повезати полигоналном линијом чији су сви сегменти дужине 2 cm, те ће стога неки сегмент AB имати крајеве обојене различитим бојама — ова ситуација је приказана на наредној слици лево).





Без умањења општости можемо узети да је A тачка прве боје, B тачка друге бојеи и да је средиште дужи AB, тачка C, обојена првом бојом. Нека су на претходној слици десно тачке D и E такве да важи

$$AC = CB = AD = DC = AE = EC = 1\text{cm и } DE = BD = BE = \sqrt{3}\text{cm}.$$

Ако би нека од тачака D или E била обојена првом бојом онда бисмо имали једнакостраничан троугао странице 1 cm чија су сва темена обојена првом бојом ($\triangle ACD$ или $\triangle ACE$). Ако то није онда су обе тачке D и E обојене другом бојом, па имамо једнакостраничан троугао BDE странице $\sqrt{3}$ cm чија су сва темена обојена другом бојом.
За други део задатка ћемо обојити раван на следећи начин. За сваку тачку $M(x_M, y_M)$ уведимо број $k = \left[\frac{2x_M}{\sqrt{3}}\right]$ и ако је k паран број обојимо ту тачку првом бојом, а ако је непаран другом бојом. Тиме смо раван обојили у две траке, које се наизменично смењују и које су ширине $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Покажимо да при оваквом бојењу не постоји једнакостраничан троугао UVW странице 1 cm код кога су сва темена обојена истом бојом.
Уочимо теме једнакостраничног троугла UVW странице 1 cm које има најмању x-координату (нека је то U и узмимо да је та координата x_U) и нека негативан смер y-осе заклапа са правом UV угао φ_1 и са правом UW угао $\varphi_2 = \varphi_1 + 60^\circ$. Тада важи $0^\circ \leqslant \varphi_1 \leqslant 120^\circ$.

Уколико је $\varphi_1 \leqslant 60^\circ$ онда је

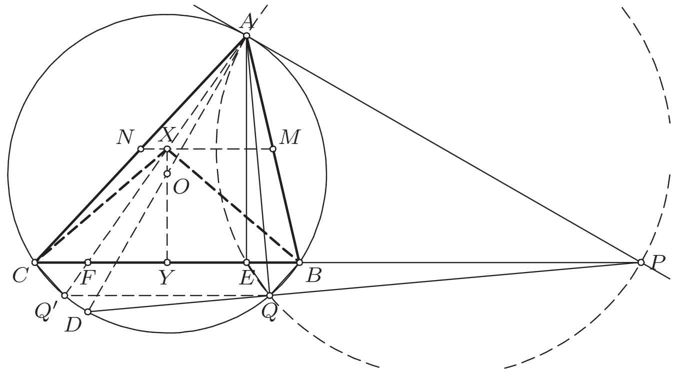
$$x_V = x_U + 1 \cdot \sin\varphi_1 \leqslant x_U + 1 \cdot \sin 60^\circ = x_U + \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant x_U + 1 \cdot \sin\varphi_2 = x_W$$

и у том случају су тачке U и W у различито обојеним тракама.
Уколико је $\varphi_1 \geqslant 60^\circ$ онда је

$$x_V = x_U + 1 \cdot \sin\varphi_1 \geqslant x_U + 1 \cdot \sin 60^\circ = x_U + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и у том случају су тачке U и V у различито обојеним тракама.
Тиме смо показали да темена произвољног једнакостраничног троугла UVW странице 1 cm са најмањом и највећом x-координатом припадају различито обојеним тракама, па не постоји једнакостраничан троугао странице 1 cm код кога су сва 3 темена обојена истом бојом.

2. Претпоставимо, без губљења општости, да је $AB < AC$. Нека је E подножје висине из темена A, а F пресек дужи AQ' и BC. Докажимо да су $\triangle BQE$ и $\triangle Q'CF$ подударни. Четвороугао $QQ'CB$ је једнакокраки трапез и важи $BQ = CQ'$ и $\sphericalangle QBE = \sphericalangle Q'CF$. Угао AQD је прав, као угао над пречником AD, па је четвороугао $PQEA$ тетиван, јер је $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PEA = 90^\circ$. Одатле следи једнакост $\sphericalangle BEQ = \sphericalangle PAQ$. Угао PAQ једнак је углу $QQ'A$ због једнакости периферијског угла и угла између тангенте и тетива, а са друге стране, углови $QQ'A$ и $Q'FC$ једнаки су као углови са паралелним крацима, те су и углови PAQ и $Q'FC$ једнаки. Дакле важи $\sphericalangle BEQ = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle Q'FC$, што са већ наведеним једнакостима осталих елемената даје $\triangle QEB \cong \triangle Q'CF$. Нека је Y подножје нормале из X на BC. Пошто је X на средњој линији MN, X је средина дужи AF, а због нормалности је $XY \parallel AE$, што значи да је XY средња линија троугла EFA, односно Y је средина дужи EF. Из доказане подударности троуглова је $BE = CF$, зато је тачка Y уједно и средина дужи BC. Отуд је троугао BCX једнакокраки, односно $BX = CX$.



ДР 2011 4А 2

3. За $n=3$ је $a=2$. Нека је сада $n>3$ и $S=\{i \mid 1\leqslant i\leqslant n,\ (i,n)=1\}$. За фиксиран број $y\in S$, скуп $\{y\cdot z \mid z\in S\}$ је редукован систем остатака по модулу n, те једначина $y\cdot z\equiv 1 \pmod{n}$ (по z) има јединствено решење у скупу S. Нека је $S'=\{y \mid y\in S,\ y^2\not\equiv 1 \pmod{n}\}$ и $S''=\{y \mid y\in S,\ y^2\equiv 1 \pmod{n}\}$. Како се елементи скупа S' могу поделити у парове који су састављени од различитих бројева и чији производ при дељењу са n даје остатак 1, то је $\prod_{y\in S'} y\equiv 1 \pmod{n}$. Зато је $a\equiv\prod_{y\in S''} y \pmod{n}$. Нека је $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја n. Тада $y^2\equiv 1 \pmod{n}$ важи акко за свако $1\leqslant i\leqslant k$ важи $p_i^{\alpha_i}\mid y^2-1=(y-1)(y+1)$. Отуда, како $(y-1,y+1)\mid 2$ и $(2,p_i)=1$, за свако $1\leqslant i\leqslant k$ или $p_i^{\alpha_i}\mid y-1$ или $p_i^{\alpha_i}\mid y+1$. Дакле, $n\mid y^2-1 \iff (y\equiv\pm1 \pmod{p_i^{\alpha_i}},\ 1\leqslant i\leqslant k)$. За сваки одабир $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k\in\{-1,1\}$ систем једначина $y\equiv\epsilon_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, $1\leqslant i\leqslant k$, на основу кинеске теореме о остацима има јединствено решење по модулу n, а тиме тачно једно решење из скупа S''. За конкретан одабир $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k\in\{-1,1\}$ означимо то решење са $y_{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_k}$. Тада је

$$a\equiv\prod_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k} y_{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_k} \pmod{n}.$$

Посматрајмо последњи производ по модулу $p_i^{\alpha_i}$, за фиксирано i. Тај производ садржи укупно 2^{k-1} умножака код којих је $\epsilon_i=-1$ и укупно 2^{k-1} умножака код којих је $\epsilon_i=1$. Производ свих умножака из прве групе, по модулу $p_i^{\alpha_i}$, конгруентан је са $(-1)^{2^{k-1}}$, док је производ свих умножака друге групе конгруентан са 1. На основу овог важи

$$\prod_{(\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_k)\in\{-1,1\}^k} y_{\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_k}\equiv(-1)^{2^{k-1}} \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \quad \text{за свако} \ \ 1\leqslant i\leqslant k.$$

Дакле, $p_i^{\alpha_i}\mid a-(-1)^{2^{k-1}}$, $1\leqslant i\leqslant k$, односно $n\mid a-(-1)^{2^{k-1}}$.
Одавде коначно добијамо да је тражени остатак при дељењу броја a бројем n једнак 1 уколико број n у својој канонској факторизацији има бар два проста делитеља, односно $n-1$ уколико је број n степен простог броја.

4. Нека је $a_i=2^i$ и $b_i=-(2^{n+1}-1-2^i)$, где је n унапред дато. Тврдимо да је скуп $\{a_i,b_i\}_{i=0}^{n}$ безбедности реда n. Очито је, пре свега, да он има тражену особину представљивости: $a_i=a_{i-1}+a_{i-1}$, за све $i\geqslant 1$, док је $a_0=a_n+b_n$, и $b_i=b_{i-1}+a_{i-1}$, за све $i\geqslant 1$, док је $b_0=b_n+b_n$. Сада тражимо најмањи подскуп у коме је укупан збир елемената једнак 0. Имајући у виду да су сви a_i позитивни а сви b_i негативни, приметимо да се у таквом подскупу сме налазити највише један b_i: већ је b_n+b_{n-1} (што су два најмања по апсолутној вредности) $=-(5\cdot 2^{n-1}-2)$, а ту негативну вредност не могу надокнадити ни сви a_i укупно (њихов збир износи $2^{n+1}-1=4\cdot 2^{n-1}+1-2<5\cdot 2^{n-1}-2$). Дакле, тражени подскуп се састоји од одређеног b_k и неколико a_i који у збиру дају његову апсолутну вредност. Но, очигледно је $2^{n+1}-1-2^k=\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}2^i=\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}a_i$, па следи да у траженом подскупу поред b_k има још n елемената a_i, што укупно чини $n+1$.

Први разред, Б категорија

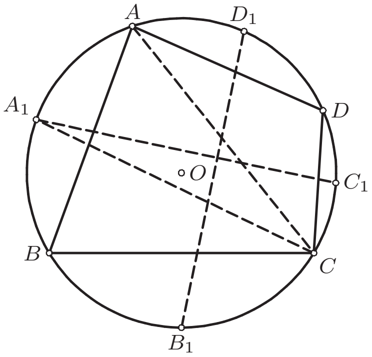
1. Нека је $A_1C_1 \cap B_1D_1 = \{E\}$. Како је C_1 средиште лука над CD, то је $\sphericalangle C_1A_1C$ једнак половини угла над тетивом CD, односно $\sphericalangle C_1A_1C = \frac{\sphericalangle DAC}{2}$. Аналогно је $\sphericalangle B_1A_1C = \frac{\sphericalangle BAC}{2}$, па је

$$\sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle C_1A_1C + \sphericalangle B_1A_1C = \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle DAC + \sphericalangle BAC) = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle DAB.$$

Аналагно је $\sphericalangle D_1B_1A_1 = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BCD$, па је

$$\sphericalangle A_1EB_1 = 180^\circ - \sphericalangle C_1A_1B_1 - \sphericalangle D_1B_1A_1 = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD)\,.$$

Како је $ABCD$ тетиван четвороугао, то је $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = 180^\circ$, па је $\sphericalangle A_1EB_1 = 90^\circ$, што је и требало доказати.



ДР 2011 1Б 1

2. Нека је x произвољан природан број чији је дакадни запис $x = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0}$. Тада је $x = 4 \cdot 25 \cdot \overline{a_na_{n-1}\ldots a_2} + \overline{a_1a_0}$, одакле закључујемо да бројеви x и $\overline{a_1a_0}$ имају међусобно једнаке остатке и при дељењу са 4 и при дељењу са 25. Како је 25 непаран број који се налази између 1 и 2011, то се он јавља у производу $y = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2011$, па је број y дељив са 25. Како међу непарним бројевима од 1 до 2011 има тачно по 503 броја који дају остатке 1, односно 3, при дељењу са 4, то је $y \equiv 1^{503} \cdot 3^{503} \equiv (-1)^{503} \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. Дакле, број састављен од последње две цифре датог броја дељив је са 25, а при дељењу са 4 даје остатак 3. Из прве чињенице добијамо да су последње две цифре 00, 25, 50 или 75. Једини од ових бројева који при дељењу са 4 даје остатак 3 је број 75, па је цифра десетица датог броја 7, а јединица 5.

3. Нека је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Тада је $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = 1 : 1$, то је $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{b}$, а како је $\overrightarrow{FQ} : \overrightarrow{QE} = 1 : 1$, то је

$\overrightarrow{FQ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{b}$. Како су A, T и P колинеарне тачке, то за неко $\lambda \in \mathbb{R}$ важи $\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{AP} = \lambda \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{b}$. Са друге стране, како су тачке B, T и Q колинеарне, постоји реалан број μ тако да је $\overrightarrow{BT} = \mu \cdot \overrightarrow{BQ} = \mu \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FQ}\right) = \mu \cdot \left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{b}\right) = -2\mu \cdot \overrightarrow{a} + \frac{3\mu}{2} \cdot \overrightarrow{b}$. Како је $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, из претходног добијамо $\lambda \cdot \overrightarrow{a} + \frac{\lambda}{2} \cdot \overrightarrow{b} = (1 - 2\mu) \cdot \overrightarrow{a} + \frac{3\mu}{2} \cdot \overrightarrow{b}$. Како су $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линеарно независни вектори, то је $\lambda = 1 - 2\mu$ и $\frac{\lambda}{2} = \frac{3\mu}{2}$. Решавањем овог система добијамо да је $\lambda = \frac{3}{5}$ и $\mu = \frac{1}{5}$, па је $AT : TC = 3 : 2$ и $BT : TQ = 1 : 4$.

4. Дата једначина је еквивалентна са

$$\begin{aligned} (1+a+a^2)(3-1-a-a^2) \cdot x &= a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1 \\ (1+a+a^2)(1-a)(2+a) \cdot x &= (a-1)(a^2+a+1)^2. \end{aligned}$$

Како је $1 + a + a^2 = \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, то је последња једначина еквивалентна са $(1-a)(2+a) \cdot x = (a-1)(1+a+a^2)$. Сада имамо три случаја:

1° $a = 1$. Скуп решења је $\mathbb{R}$.

2° $a = -2$. Једначина нема решења.

3° $a \neq 1$, $a \neq -2$. Једначина има јединствено решење $x = -\dfrac{1+a+a^2}{a+2}$.

(Тангента 58, стр. 13, М811)

5. Посматрајмо прво произвољан једнакостраничан троугао странице 2 cm ове равни. Барем два његова темена су исте боје, па у равни постоје две тачке исте боје на растојању 2. Нека су ово тачке A_1 и A_4 и нека су обојене првом бојом. Посматрајмо сада правилан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (A_1 и A_4 су дијаметрално супротна темена). Ако је неко од темена A_2, A_3, A_5 или A_6 обојено првом бојом, онда оно заједно са A_1 и A_4 чини тражени троугао. У супротном, сва темена A_2, A_3, A_5 и A_6 су обојена другом бојом, па троугао $A_2A_3A_5$ испуњава услове задатка.

Други разред, Б категорија

1. Нека је дати троугао ABC, при чему је $\sphericalangle ACB = 90°$, и нека је D подножје хипотенузине висине. Тада је $\triangle CDA \sim \triangle BCA$, па је $\frac{h}{b} = \frac{a}{c}$. Сада је

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2},$$

што је и требало доказати. (Тангента 56, стр. 22, Писмени задаци)

2. Претпоставимо да такви бројеви постоје. За $x = 1$, вредност сваке од наведених функција једнака је $a + b + c$. То значи да графици наведених функција пролазе кроз исту тачку (са координатама $(1, a+b+c)$), што није случај. Дакле, овакви бројеви не постоје.

Друго решење. Претпоставимо да такви бројеви постоје. Са приказаних графика можемо уочити да свака квадратна функција има једну позитивну и једну негативну нулу. Отуда је производ свих шест поменутих нула негативан. Из Виетових формула производ нула датих функција је, редом, $\frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, па је производ свих шест нула $\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1$, што је супротности са закључком да је овај производ негативан. Дакле, претпоставка није била тачна.

3. Означимо са S скуп свих комплексних бројева за које важи $\left|\frac{z+i}{1+z}\right| = 1$. Очигледно $-1 \notin S$. Зато је $z \in S \Leftrightarrow |z + i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - (-i)| = |z - (-1)|$. Отуда је S скуп свих комплексних бројева таквих да су одговарајуће тачке у комплексној равни једнако удаљене од тачака којима одговарају комплексни бројеви $-i$ и -1. Зато скуп S чине сви комплексни бројеви чије одговарајуће тачке леже на правој која представља симетралу дужи чије су крајње тачке одређене комплексним бројевима $-i$ и -1. Дакле, $S = \{x(1 + i) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Једнакост $|z^{2010} + iz^{2009} + \ldots + i^{2009}z + i^{2010}| = |z^{2010} + z^{2009} + \ldots + z + 1|$ еквивалентна је са једнакошћу

$$\left|\frac{z^{2011} - i^{2011}}{z - i}\right| = \left|\frac{z^{2011} - 1^{2011}}{z - 1}\right|.$$

Према претходном потребно је и довољно доказати да за свако $z \in S$ важи $|z^{2011} - i^{2011}| = |z^{2011} - 1^{2011}|$. За доказ последње једнакости довољно је доказати да је тачка одређена бројем z^{2011}, за $z \in S$, једнако удаљена од тачака одређених бројевима $i^{2011} = -i$ и $1^{2011} = 1$. Из описа скупа S, за $z \in S$, имамо

$$\begin{aligned} z^{2011} &= (x(1 + i))^{2011} = x^{2011} \cdot (1 + i)^3 \cdot ((1 + i)^4)^{502} \\ &= x^{2011} \cdot 2(1 - i) \cdot (-4)^{502} = 2^{1005} \cdot x^{2011}(1 - i), \quad \text{за неко } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Дакле $z^{2011} \in T = \{y(1 - i)|y \in \mathbb{R}\}$. Свака тачка одређена комплексним бројем $t \in T$ има особину $|t - 1| = |t - (-i)|$. Отуда следи да за свако $z \in S$ важи једнакост $|z^{2011} - i^{2011}| = |z^{2011} - 1^{2011}|$, а тиме и једнакост коју је требало доказати.

4. Размотрити следеће положаје белог скакача (ови положаји означени су на слици):

1° Налази се на једном од 4 угаона поља. Тада он напада тачно 2 поља, па се црни скакач може налазити на једном од 61 поља.

2° Налази се на неком од 8 поља која имају заједничку страницу са неким угаоним пољем. Тада он напада тачно 3 поља, па се црни скакач може налазити на једном од 60 поља.

3° Налази се на неком од 20 поља која се налазе уз ивичне стране табле или имају заједничку страницу са неким пољем из случаја 2°, а није у случају 1° или 2°. Тада он напада тачно 4 поља, па се црни скакач може налазити на једном од 59 поља.
4° Налази се на неком од 16 поља која имају заједничку страницу са неким пољем као у случају 3°, а није у случају 1°, 2° или 3°. Тада он напада тачно 6 поља, па се црни скакач може налазити на једном од 57 поља.
5° Налази се на неком од преосталих 16 поља табле. Тада он напада тачно 8 поља, па се црни скакач може налазити на једном од 55 поља.
Из претходног закључујемо да је тражени број распореда једнак

$$4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55 = 3696.$$

1	2	3	3	3	3	2	1
2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	5	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	5	4	3
3	4	5	5	5	5	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2
1	2	3	3	3	3	2	1

ДР 2011 2Б 4

5. Приметимо да је $10^4 - 1 = 99 \cdot 101$. За сваки природан број n важи

$$10^{4n} - 1 = (10^4 - 1)((10^4)^{n-1} + (10^4)^{n-2} + \ldots + (10^4)^1 + 1),$$

те је број $10^{4n} - 1$ дељив са 99. Посматрајмо произвољан природан број који у свом декадном запису има $4k$ цифара. Тада је

$$\begin{aligned} x &= \overline{c_{4k}c_{4k-1}c_{4k-2}c_{4k-3}c_{4k-4}c_{4k-5}c_{4k-6}c_{4k-7}\cdots\cdots\cdots c_8c_7c_6c_5c_4c_3c_2c_1} \\ &= 10^{4(k-1)} \cdot \overline{c_{4k}c_{4k-1}c_{4k-2}c_{4k-3}} + \ldots + 10^4\overline{c_8c_7c_6c_5} + \overline{c_4c_3c_2c_1} \\ &= (10^{4(k-1)} - 1) \cdot \overline{c_{4k}c_{4k-1}c_{4k-2}c_{4k-3}} + \ldots + (10^4 - 1) \cdot \overline{c_8c_7c_6c_5} \\ &\quad + \overline{c_{4k}c_{4k-1}c_{4k-2}c_{4k-3}} + \ldots + \overline{c_8c_7c_6c_5} + \overline{c_4c_3c_2c_1}. \end{aligned}$$

Одавде закључијемо да је остатак при дељењу броја x са 99 исти као и остатак при дељењу збира бројева $\overline{c_{4k}c_{4k-1}c_{4k-2}c_{4k-3}}$, $\ldots$, $\overline{c_8c_7c_6c_5}$, $\overline{c_4c_3c_2c_1}$ са 99. Уколико би употребили све налепнице, тада би добили број који при дељењу са 99 даје исти остатак као и број $1000 + 1001 + \ldots + 2010 + 2011 = \frac{3011 \cdot 1012}{2} = 15389 \cdot 99 + 55$, што је 55. Зато се не могу употребити све налепнице. Покушајмо да изоставимо једну налепницу. Тада, из предходног закључујемо да се на тој налепници мора налазити број који при дељењу са 99 даје остатак 55. Налепница на најмањим бројем који има ову особину је она на којој је записан број 1045. Коначно добијамо да Перица треба налепнице да залепи у редоследу

$$\overline{2011\;2010\;2009\;\ldots\;1046\;1044\;\ldots\;1001\;1000}.$$

Трећи разред, Б категорија

1. Довољно је доказати да је $4^{2n}-3^{2n}-7$ дељиво са 7 и са 8. Приметимо да важи

$$4^{2n}-3^{2n}-7\equiv 16^n-9^n\equiv 2^n-2^n\equiv 0 \pmod 7,$$

као и

$$4^{2n}-3^{2n}-7\equiv 16^n-9^n-7\equiv 0-1^n-7\equiv 0 \pmod 8,$$

чиме је доказ у потпуности завршен.
(Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци)

2. Да би корен и логаритми били дефинисани потребно је да важи

$$x^2-1\geqslant 0,\ 4^{\sqrt{x^2-1}}-1>0,\ 4^{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{2}>0,$$

што је еквивалентно са $|x|>1$.
Уколико уведемо смену $t=4^{\sqrt{x^2-1}}$ добијамо еквивалентну неједначину

$$2\log_{\frac{1}{2}}(t-1)-\log_{\frac{1}{2}}(t+\frac{1}{2})\geqslant -1,$$

односно $(t-1)^2\leqslant 2t+1$. Решење ове неједначине је $0\leqslant t\leqslant 4$, па је $0\leqslant 4^{\sqrt{x^2-1}}\leqslant 4=4^1$. У овој експоненцијалној неједначини лева страна је увек задовољена, а десна је еквивалентна са $\sqrt{x^2-1}\leqslant 1$, тј. $x^2-1\leqslant 1$. Одавде је $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, што уз почетни услов даје да решења полазне неједначине чине скуп $[-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2}]$.

3. а) Како је $P=P_{\triangle ABC}+P_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\beta+\frac{1}{2}cd\cdot\sin\delta$, а из косинусних теорема $AC^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cdot\cos\delta$, то је

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cdot\cos\beta-2cd\cdot\cos\delta.$$

Сада имамо

$$\begin{aligned}16P^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 &= 4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd(\cos\beta\cos\delta-\sin\beta\sin\delta)\\ &= 4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(\beta+\delta).\end{aligned}$$

б) Нека је $\sphericalangle A'B'C'=\beta'$, $\sphericalangle C'D'A'=\delta'$ и P' површина четворугла $A'B'C'D'$. Како је $A'B'C'D'$ тетивни четвороугао, то је $\cos(\beta'+\delta')=-1$, па је на основу формуле добијене у делу под а)

$$\begin{aligned}16P'^2 &= 4a^2b^2+4c^2d^2+8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)\\ &= 16P^2+8abcd\cdot(1+\cos(\beta+\delta))\geqslant 16P^2.\end{aligned}$$

4. Како се центар уписане кружнице правилног шестоугла поклапа са центром описане кружнице око њега, то се наведене тачке могу поделити у три пара тачака које су симетричне у односу на тачку одређену бројем 0. Наспрам тачке која одговара броју a не може бити тачка одређена бројем b. Заиста, ако су тачке одређене бројевима a и b дијаметрално супротне, онда је $a = -b$, те би важило $a^2 = b^2$, што није могуће јер би се бар две од 6 наведених тачака поклапале. Аналогно овом закључујемо да никоје две од тачака a, b и c нису дијаметрално супротне. Зато су дијаметрално супротне тачке одређене бројевима a, b и c (неким редом) тачке одређене бројевима a^2, b^2 и c^2. Нека су, редом, наспрам тачака одређених бројевима a, b и c тачке одређене бројевима x, y и z. Тада је $\{x, y, z\} = \{a^2, b^2, c^2\}$ и $a = -x$, $b = -y$ и $c = -z$. Множењем последњих једнакости и коришћењем наведене скуповне једнакости, добијамо

$$a \cdot b \cdot c = (-x) \cdot (-y) \cdot (-z) = -a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$

Како су бројеви a, b и c различити од нуле (јер је сваки различит од свог квадрата), то је $abc = -1$, што је и требало доказати.

5. Докажимо да Али Баба има стратегију којом може пронаћи благо. Нека Али Баба током прва три дана, редом, улази у пећине са бројевима 2, 3 и 4. Уколико је приликом ових улазака Али Баба пронашао благо, задатак је решен. Зато, надаље, претпоставимо да у овим покушајима благо није пронађено. Докажимо да се благо трећег дана није налазило у пећини са бројем 2. Претпоставимо супротно. Како се првог дана није налазило у пећини број 2, то се трећег дана може наћи у тој пећини једино ако је првог дана било у пећини број 4. Међутим, тада би другог дана благо морало да буде у пећини број 3. Контрадикција. Овим смо закључили да се благо трећег дана не налази у пећинама са бројевима 2 и 4, односно да се налази у некој од пећина 1, 3 или 5. Зато ће се четвртог дана благо налазити у пећини 2 или 4. Али Баба зато четвртог дана улази у пећину број 4. Уколико није пронашао благо, то значи да је благо четвртог дана у пећини број 2. Зато ће оно петог дана бити или у пећини број 1 или у пећини број 3. Али Баба петог дана улази у пећину са бројем 3. Уколико благо није ту, оно је тог дана у пећини број 1 и наредног (шестог) дана мора да буде у пећини број 2. Тада, шестог дана, Али Баба улази у пећину број 2 и налази благо.

Четврти разред, Б категорија

1. Услов да је логаритам у другој једначини дефинисан је $x^2 + 3x > 0$, односно $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

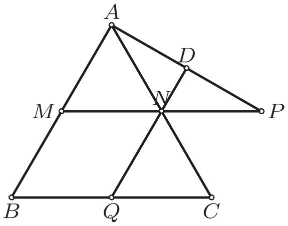
Другу неједначину можемо написати у облику $x \cdot \big(\log_{0,5}(x^2+3x)+2\big) > 0$. Дакле, потребно је размотрити два случаја:

1° $x > 0$ и $\log_{0,5}(x^2 + 3x) + 2 > 0$. Друга неједначина еквивалентна је са $\frac{x^2+3x}{4} < 1$, чије је решење $x \in (-4, 1)$. Самим тим, решење у овом случају је $x \in (0, 1)$.
2° $x < 0$ и $\log_{0,5}(x^2 + 3x) + 2 < 0$. Слично као у претходном случају налазимо да је решење $x \in (-\infty, -4)$.
Дакле, решење друге неједначине је $x \in (-\infty, -4) \cup (0, 1)$.
Сређивањем израза у првој неједначини полазног система добијамо да је

$$\frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0,25} 3} = \frac{\log_2 9 - \log_2 45}{\log_4 75 - \log_4 3} = \frac{\log_2 \frac{1}{5}}{\log_4 25} = -1,$$

те је решење ове неједначине $x > -5$.
Решење датог система добијамо као пресек решења одговарајућих неједначина, тј. $x \in (-5, -4) \cup (0, 1)$.

2. а) Како је MN средња линија троугла ABC, то је $MN = \frac{BC}{2} = \frac{AC}{2} = NA$, па је $MN = NA = NP$. Самим тим, тачка A се налази на кругу над пречником MP, па је $\sphericalangle MAP = 90°$.
б) Како је $ND \perp AP$ и $MA \perp AP$, то је $MA \parallel ND$.



ДР 2011 4Б 2

Даље, како је N средиште дужи MP и средиште дужи AC, из претходног закључујемо да је ND средња линија троугла MAP, а NQ средња линија троугла BAC. Самим тим је

$$DQ = DN + NQ = \frac{MA}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{BC}{4} + \frac{BC}{2} = \frac{3}{4} \cdot BC,$$

што је и требало доказати. (Тангента 62, стр. 36, Писмени задаци)

3. Нека је $x' = x - 18$, $y' = y - 2$ и $z' = z$. Број решења полазне једначине је тада једнак броју решења једначине $x' + y' + z' = 1991$ у скупу природних бројева.
Овај број ћемо одредити на следећи начин. Поставимо у низ 1991 куглица и поставимо две преграде између куглица. Нека је x' број куглица лево од прве преграде, y' број куглица између преграда и z' број куглица десно од друге преграде. Приметимо да сваком решењу једначине одговара неко постављање преграда и да различитим постављањима преграда одговарају различита решења. Дакле, број решења једнак је броју различитих постављања преграда између куглица. Како између куглица постоји укупно 1990 места, то је

тражени број једнак броју могућих постављања две преграде на нека два од 1990 места, тј. $\binom{1990}{2}$.

4. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење тривијално важи, па је довољно доказати да уколико тврђење важи за n, да тада важи и за $n+1$.
Нека је зато $(a+b)^n = A^2 + B^2$, за A, $B \in \mathbb{Z}$. Тада је

$$(a+b)^{n+1} = (A^2+B^2)(a^2+b^2) = (Aa+Bb)^2 + (Ab-Ba)^2,$$

што је и требало доказати.

5. Нека су $p, q, r \in \mathbb{Z}$ нуле полинома $x^3 + ax - 13x + 42$. Према Виетовим правилима је

$$\begin{aligned} pqr &= -42 \\ pq+qr+rp &= -13. \end{aligned}$$

Из прве једначине можемо закључити да је барем један од бројева p, q и r дељив са 7, нека је то (без умањења општости) број r. Сада је из прве једнакости $|pq| = \left|-\dfrac{42}{r}\right| \leqslant 6$, па је $-7 \leqslant -13 - pq \leqslant -19$. Даље, из друге једнакости закључујемо да је $r(p+q) = -13 - pq$, па је на основу претходног $-13 - pq = -7$ или $-13 - pq = -14$. Размотримо ова два случаја:
Први случај. Имамо $pq = -6$, односно $r = 7$, па из друге једнакости добијамо $p + q = -1$. Самим тим, по Виетовим правилима, p и q су корени квадратне једначине $t^2 + t - 6 = 0$, па је $\{p, q\} = \{2, -3\}$, а корени датог полинома су 2, -3 и 7.
Други случај. Имамо $pq = 1$, односно $r = -42$, па из друге једначине добијамо $p + q = \dfrac{1}{3}$, што је очигледно немогуће, јер су p и q цели бројеви.
Дакле, нуле датог полинома су 2, -3 и 7.

САДРЖАЈ